1.

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 이므로 $1+9=10$

답)⑤

2.

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$이므로, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$이다.

$f'(e)=0$

답)④

3.

$\lim_{x\to0}\frac{3^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\ln3$

답)②

4.

$\log_4 x=t$ 치환하면, $t=1$ 따라서 $x=4$

답)③

5.

$(\sec x)'=\sec x\tan x$이므로, $[\sec x]_0^{\frac{\pi}{3}}=1$

답)①

6.

A,B를 일렬로 세운 것을 E라고 하자. C,D,E를 세우는 경우의 수는 $3!$이고 A,B는 서로 위치를 바꿀 수 있으므로 2가지를 곱해줘야 한다. 따라서 경우의 수는 $3!\cdot2=12$

답)③

7.

$\sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$이므로, 식을 정리하면 $\sin x=\sqrt{3}\cos x$ 이 식에서 $x=\alpha$이므로, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=\sqrt{3}$

답)⑤

8.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{2k}{n})$의 값은 정적분의 정의에 의해 $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx$이므로, 계산해주면 $\frac{e^4-1}{4}$입니다.

답)④

9.

$C_1=W_1\cdot\log_2 256$, $C_2=W_2\cdot\log_2 512$ 양변을 서로 나눠주면 $\frac{C_1}{C_2}=\frac{W_1}{W_2}\cdot\frac{8}{9}$이고, 조건에 의해, $C_1=\frac{4}{3}C_2$ 따라서, $\frac{W_1}{W_2}=\frac{3}{2}$이다.

답)①

10.

임의의 점 t에 대해 $(t,\frac{k}{t})$에서의 접선의 방정식을 쓰면, $y=-\frac{k}{t^2}(x-t)+\frac{k}{t}$인데 이 접선이 $(0,1)$과 $(4,0)$을 지나므로 대입해주면, $k=1$이다.

답)⑤

11.

빈 주머니가 없다고 했으므로, 1개씩 먼저 넣어주고 남은 5개를 배치해주면 됩니다. 여기서 주머니는 모두 같다고 하였으므로 순서는 고려하지 않아야 합니다. 따라서 경우의 수는 $(5,0,0)$, $(4,1,0)$, $(3,2,0)$, $(3,1,1)$, $(2,2,1)$ 총 5가지입니다.

답)④

12.

$x=0$ 미분가능하다는 조건이 있으므로, 자연스럽게 $x=0$에서는 연속합니다. $\sqrt{a}+1=b$와 $-\frac{1}{2\sqrt{a}}=-\frac{1}{4}$식을 연립하면, $a=4$, $b=3$이므로, $a+b=7$

답)①

13.

$y=\cos x$의 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$에서 x축과 둘러싸인 넓이는 2인데 $y=ax^2+1$이 그 넓이를 3등분 하므로, $2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{-a}}} ax^2+1dx=\frac{2}{3}$입니다. 따라서 $a=-4$입니다.

답)③

14.

$\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=6$, $\overline{DH}=2\sqrt{7}$이므로, $\overline{BH}=4\sin\theta$, $\overline{AH}=4\cos\theta$이다. 따라서 $f(\theta)=12\sin\theta$, $g(\theta)=4\sqrt{7}cos\theta$이므로, $f(\theta)+g(\theta)$의 최댓값은 $\sqrt{12^2+(4\sqrt{7})^2}=16$

답)③

15.

$B(t, \log_{\sqrt{2}}t)$, $C(t+2, \log_a(t+2))$라 하면, $\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}t=\log_a(t+2) \\ \log_{\sqrt{2}}(t+2)=\log_a(t+2)+2\end{cases}$ 이므로, 소거법을 이용하여 빼주면, $\log_{\sqrt{2}}\frac{t+2}{t}=2$, $t=2$ 따라서, $a=2$

답)①

16.

ⅰ) 앞쪽의 3자리에 커플을 앉히는 경우

철수와 영희를 앞쪽 붙어있는 3자리에 앉힐 수 있는 경우의 수는 4가지이고, 나머지 자리에 영수와 민지를 붙여 앉히는 경우의 수는 4가지, 이 상태에서 기강이를 앉히는 경우의 수는 4가지인데, 철수&영희 조합과 영수&민지 조합은 위치를 서로 바꿀 수 있으므로, $2\cdot4\cdot4\cdot4=128$입니다.

ⅱ) 앞쪽의 3자리에 커플을 앉히지 않는 경우

철수와 영희를 뒤쪽의 붙어있는 자리 2개중 하나를 선택하고 두 명은 서로 자리를 바꿀 수 있으므로, $2\cdot2=4$ 그리고, 영수와 민지는 서로 자리 바꾸는 경우만 고려하여 2가지이고, 기강이는 4자리에 앉을 수 있으므로, 총 경우의 수는

$4\cdot2\cdot4=32$

$\because 128+32=160$

답)②

17.

$\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}$

이므로, $\int_0^{\pi}\frac{xsinx}{1+\cos^2 x}dx$과 더해주면,

$\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx$이다.

따라서

$\int_0^{\pi}\frac{xsinx}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$이 라 할 수 있고, $\sin x=t$로 치환하여 적분을 해주면, $\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt$이다. 여기서 $t=\tan\theta$로 치환하여 한 번 더 적분해주면

$\int_0^{\pi}\frac{xsinx}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}$이다. 따라서 답은

$\frac{\frac{\pi^2}{9}}{\frac{\pi^2}{4}}=\frac{4}{9}$이다.

답)④

18.

원의 중심을 O라 할 때, 주어진 넓이는 $\triangle PCD$ +부채꼴 OCD- $\triangle OCD$라 할 수 있습니다.

$\overline{AD}=\overline{BC}$이므로, $\overline{AP}=\overline{BP}$임을 알 수 있습니다. $\triangle ABP$가 이등변 삼각형이므로 이 삼각형의 높이는 $\overline{OP}$임을 알 수 있습니다. 넓이가 $12\sqrt{3}$이므로, 높이는 자연히 $2\sqrt{3}$입니다. 삼각비를 통해, $\angle PAB=\angle PBA=30^{\circ}$임을 알 수 있습니다. $\triangle PCD$의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\cdot\sin120^{\circ}=3\sqrt{3}$입니다.

$\angle ADB$는 원주각의 성질에 의해 90°이므로,

$\angle CBD = 30^\circ$ 입니다. 중심각은 원주각의 2배인 성질을 이용하면, 부채꼴 OCD의 중심각은 60°임을 알 수 있습니다. 따라서 부채꼴 OCD-$\triangle OCD$는

$\frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = 6\pi - 9\sqrt{3}$ 입니다.

따라서 총 넓이는 $6\pi - 6\sqrt{3}$ 입니다.

답)②

19.

ㄱ. $f(x) = \log_2 x - (\frac{1}{4})^x$라 하면, $f(1) = -\frac{1}{4}$이고, $f(2) = \frac{15}{16}$이므로, 사이값 정리에 의해 $1 < x_1 < 2$이다. ㄱ은 참

ㄴ. $x_2 < 1$임이 자명하므로, 식의 양변을 $(x_1 - 1)(1 - x_2)$로 나누면, $\frac{y_2}{1 - x_2} > \frac{y_1}{x_1 - 1}$이다. 이 식은 $(1, 0)$에서 (x_2, y_2)을 이은 직선을 y축에 대칭한 직선의 기울기와 $(1, 0)$에서 (x_1, y_1)을 이은 직선의 기울기를 비교하는 것인데 $x > 0$에서 $y = (\frac{1}{4})^x$는 항상 감소하는 형태이므로 아래로 볼록인 부분이 기울기가 클 수 밖에 없다. ㄴ은 참

ㄷ. 양변을 $x_2(x_1 - 1)$로 나눠주면 $\frac{1 - y_2}{x_2} < \frac{y_1}{x_1 - 1}$이 된다. $(0, 1)$에서 (x_2, y_2)을 이은 직선을 y축에 대칭한 직선의 기울기와 (x_1, y_1)에서 $(1, 0)$을 이은 직선의 기울기를 비교하는 것인데 그림을 보면 $\frac{1 - y_2}{x_2}$는 1보다 작음을 $\frac{y_1}{x_1 - 1}$은 1보다 큼을 알 수 있으므로 ㄷ은 참

답)⑤

20.

주어진 조건을 통해 $g(1) = 0$, $\frac{1}{x} g'(x) = f(x)$임을 알 수 있다. $\int_{\frac{1}{3}}^{1} g(\frac{1}{x}) dx$에서 $\frac{1}{x} = t$로 치환하여 고쳐주면 $\int_{1}^{3} \frac{1}{t^2} g(t) dt$이고,

$\int_{1}^{3} f(x) dx = \int_{1}^{3} \frac{1}{x} g'(x) dx$이다.

$\int_{1}^{3} \frac{1}{x} g'(x) dx$를 부분적분 해주면

$[\frac{1}{x} g(x)]_1^3 + \int_{1}^{3} \frac{1}{x^2} g(x) dx = 2$이므로,

계산해주면 $\frac{g(3)}{3} = \frac{11}{6}$이다. $g(3) = \frac{11}{2}$

답)②

21.

주어진 조건을 활용하면 $e^{f(0)} = 1$, $e^{f(1)} = 2$이므로, $c = 1$, $a + b = 0$임을 알 수 있다. $g'(\ln 2) = \frac{1}{f'(1)}$이므로, $f'(x)$를 구해서 대입해야한다. $f'(x) = \frac{3x^2 + 2ax - a}{x^3 + ax^2 - ax + 1}$ 따라서, $g'(\ln 2) = \frac{2}{a + 3}$이다. 여기서 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일 대응이어야 하는데 $\ln x$는 일대일 대응이므로 $x^3 + ax^2 - ax + 1$가 일대일 대응이어야 한다. 이 함수를 미분하면 $3x^2 + 2ax - a$이고, 판별식≤ 0이어야 하므로, $a^2 + 3a \leq 0$, $-3 \leq a \leq 0$ 따라서 $a = 0$일 때, 최솟값을 가지므로, $g'(\ln 2)$의 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다.

답)③

22.

$\frac{9!}{6! \cdot 3!} + \frac{9!}{7! \cdot 2!} = 120$

답)120

23.

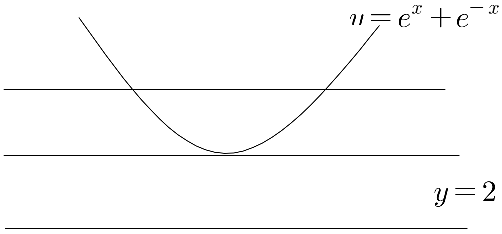
$f(\sqrt{x})=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}+4\ln x$

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})=1+\dfrac{4}{x}$이므로, $x=1$을 넣어 주면 $f'(1)=10$

답)10

24.

$f''(x)=e^x+e^{-x}-2k$이므로, $y=e^x+e^{-x}$와 $y=2k$의 관계를 보면 된다.



$y'=e^x-e^{-x}$이므로, $y=e^x+e^{-x}$는 $x=0$에서 최솟값 2를 갖는다. $2k$는 $y=e^x+e^{-x}$와 $2k=2$일 때, 최초로 만나지만 이 때는 f''의 값은 0이지만 부호 변화가 없으므로 변곡점이 존재하지 않는다. 따라서 변곡점이 존재하려면 $2k>2$여야 하므로 $k>1$ 따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

답)2

25.

햄과 두부 사이에 다른 반찬을 담는다고 했으므로 햄과 두부가 인접해 있지만 않으면 된다. 따라서 구하고자 하는 경우의 수는 (전체 경우의 수)-(햄과 두부가 인접해 있는 경우의 수)라고 할 수 있다. 전체 경우의 수는 $\dfrac{5!}{5}=24$이고, 햄과 두부가 인접해 있는 경우의 수는 $2\cdot\dfrac{4!}{4}=12$이다, 따라서 답은 $24-12=12$

답)12

26.

$f'(x)$는 $x=-\dfrac{\pi}{2},0,\dfrac{\pi}{2}$에서 근을 갖는데 부호 변화를 보면 $x=0$일 때, 극소를 가짐을 알 수 있다. $f'(x)$를 부분적분을 하면,

$f(x)=\int xcosxdx=xsinx+\cos x+C$

인데, $f(0)=0$이므로, $C=-1$이다. 따라서 $f(\pi)^2=(-2)^2=4$이다.

답)4

27.

$\angle DBC=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$이므로, $\angle EBC=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}$, $\angle EBA=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{2}\theta$임을 알 수 있다. 따라서 $\overline{EB}=2\cos(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{2}\theta)$이고, $\overline{BC}=2$임을 알 수 있으므로,

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cos(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{2}\theta)\cdot\sin(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2})$

$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{S(\theta)}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{2\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\sin\dfrac{3}{2}\theta}{\theta}=3$

28.

$f(-2)=0$이고, $f(x)$가 $x=1$에서 미분이 불가능하려면 $f(x)=|x-1|\sqrt{x+2}$꼴이 될 수 밖에 없다. (이래야만 $x>1$, $x<1$일 때 절댓값에서 -가 나오거나 안 나올 수 있기 때문이다.) 따라서, $f(7)=18$

답)18

29.

주어진 조건에 의해 a,b,c는 모두 $[-5,5]$에서의 수임을 알 수 있다.

ⅰ) $a=0$, $b=0$, $c=0$ 1가지

ⅱ) $a=0$, $b=0$, $c\neq 0$ $1,2,3,4,5$를 모두 선택할 수 있고 음수도 가능하므로 $5\cdot 2=10$가지

ⅲ) $a=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ $b\leq c$를 만족해야 하는데, b,c는 각각 양, 음수가 모두 될 수 있으므로, $4\cdot{}_5H_2=60$가지

ⅳ) $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ $a\leq b\leq c$를 만족하면 되므로, $8\cdot{}_5H_3=280$

따라서 경우의 수는 $1+10+60+280=351$가지이다.

답)351

30.

(가)식을 미분하면, $2x\cdot f(x)=ax\cdot e^{ax}$이므로, $f(x)=\frac{a}{2}e^{ax}\,(x>0)$이다. (나) 조건에 주어진 $\int_2^x(t-a)f(t)dt\geq 0\,(x>0)$에 대하여 $g(x)=\int_2^x(t-a)f(t)dt$라 하면, $g(2)=0$이고, $g'(x)=(x-a)f(x)=\frac{a}{2}(x-a)e^{ax}$임을 알 수 있다. 여기서 e^{ax}는 값이 항상 0보다 크므로, $g(x)$는 $x=a$일 때, 극값을 가짐을 알 수 있다. a에서 극대를 갖게 된다면 $a<0$이므로, $g(x)\geq 0$을 $x>0$에서 만족하는게 불가능하다.
따라서 $g(x)$는 $x=a$에서 극소를 가진다.
$x=a$에서 최소를 가짐이 자명한데, $g(a)\geq 0$을 반드시 만족해야 하는 상황에서, $g(2)=0$이므로 $a=2$일 수 밖에 없다. 구하고자 하는 것을 보기 쉽게 바꿔보면 $\int_0^2(x-2)e^{2x}dx=pe^4+q$임을 알 수 있다. 부분적분을 통해 계산해보면, $[\frac{1}{2}(x-2)e^{2x}]_0^2-\int_0^2\frac{1}{2}e^{2x}dx=-\frac{1}{4}e^4+\frac{5}{4}$ 이다. $72(\frac{1}{16}+\frac{25}{16})=72\cdot\frac{13}{8}=117$

답)117