06 공간도형

기하와 벡터 교과서 Review

문제 1

서로 다른 두 직선 l, m과 서로 다른 두 평면 α, β에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) $l /\!/ \alpha$, $l /\!/ \beta$이면 $\alpha /\!/ \beta$

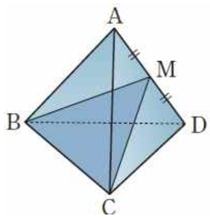
(2) $l /\!/ \alpha$, $m /\!/ \alpha$이면 $l /\!/ m$

(3) $l /\!/ \alpha$, $l \perp m$이면 $m \perp \alpha$

(4) $\alpha /\!/ \beta$, $l \perp \alpha$이면 $l \perp \beta$

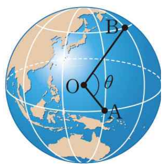
문제 2

오른쪽 그림의 정사면체에서 선분 AD의 중점을 M이라고 할 때, 두 평면 BCM과 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자. 이때 $\cos\theta$의 값을 구하여라.



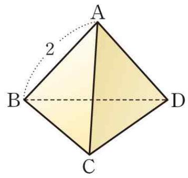
문제 3

오른쪽 그림과 같이 지구의 모양을 구라고 가정하고 그 중심을 O라고 하자. 또, 적도 상에 있는 동경 150°인 지점을 A라 하고, 동경 180°, 북위 45°인 지점을 B라고 하자. $\angle AOB$의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



문제 4

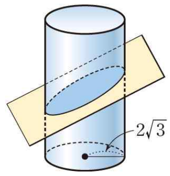
오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정사면체가 있다. 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이를 구하여라.



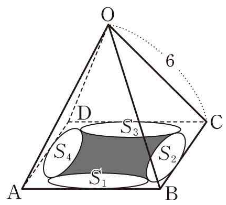
06 공간도형

기하와 벡터 교과서 Review

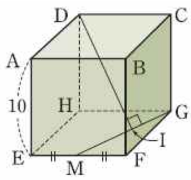
문제 5 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원기둥을 밑면과 30°의 각을 이루는 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면은 타원이다. 이 타원의 장축, 단축을 각각 좌표평면의 x축, y축 위에 놓을 때, 타원의 방정식을 구하여라.



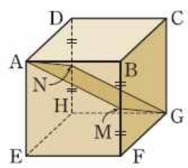
문제 6 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정사각뿔이 있다. 네 삼각형 OAB, OBC, OCD, ODA에 각각 내접하는 네 원의 밑면 ABCD 위로의 정사영을 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라고 하자. 네 도형 S_1, S_2, S_3, S_4로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이가 $a+b\sqrt{3}\pi$일 때, ab의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수이다.)



문제 7 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 10인 정육면체에서 $\overline{EF}$의 중점을 M, 꼭짓점 D에서 선분 GM에 내린 수선의 발을 I라고 하 자. 선분 DI의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 써라.



문제 8 오른쪽 정육면체에서 두 모서리 BF, DH의 중점을 각각 M, N이라고 하자. 평면 AMGN과 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 써라.

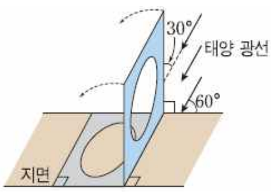


06 공간도형

기하와 벡터 교과서 Review

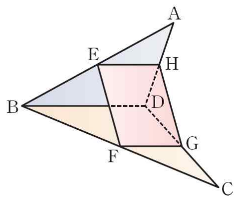
문제 9

다음 그림과 같이 태양 광선이 지면과 $60°$의 각을 이루면서 비추고 있다. 또 한 변의 길이가 9인 정사각형에 지름의 길이가 6인 원 모양의 구멍이 뚫려 있는 판은 지면과 수직으로, 태양 광선과 $30°$의 각을 이루 고 있다. 판의 한 변을 지면에 고정하고 판을 그림자 쪽으로 기울일 때 생기는 그림자의 최대 넓이를 구하여라. (단, 판의 두께는 무시한다.)



문제 10

오른쪽 그림과 같이 한 평면 위에 있지 않은 네 점 A, B, C, D를 차례로 이어서 만든 사각형 ABCD의 각 변의 중점 E, F, G, H라고 할 때, 사각형 EFGH가 평행사변형임을 증명하여라.

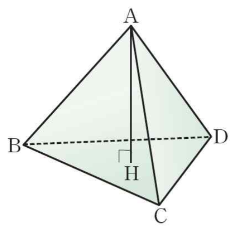


문제 11

오른쪽 그림과 같은 정사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 밑면 BCD에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 점 H가 삼각형 BCD의 무게중심임을 보여라.

(2) 직선 AB와 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



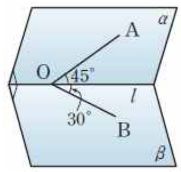
문제 12

오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 3 cm, 높이가 8 cm인 원기둥 모양의 컵에 물이 6 cm 높이만큼 들어 있다. 이 컵을 기울여 물을 쏟으려고 할 때, 물이 쏟아지기 직전의 수면의 넓이를 구하여라.

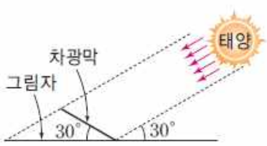
06 공간도형

기하와 벡터 교과서 Review

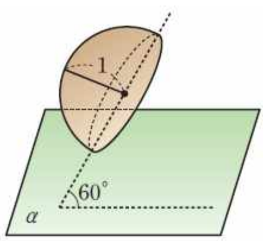
문제 13 오른쪽 그림과 같이 서로 수직으로 만나는 두 평면 α, β 위에 각각 점 A, B를 잡고, 교선 l 위에 점 O를 잡았더니, 교선 l과 두 직선 OA, OB가 이루는 각이 각각 45°, 30°가 되었다. 두 직선 OA, OB가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



문제 14 다음 그림은 운동장에 지면과 30°의 각으로 설치된 차광막과 그 그림자를 나타낸 것이다. 햇빛이 지면에 30°로 비출 때, 그림자의 넓이는 24이다. 차광막의 넓이를 구하여라.



문제 15 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 반구의 밑면을 포함하는 평면과 평면 α가 이루는 각의 크기가 60°일 때, 반구의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 구하여라.

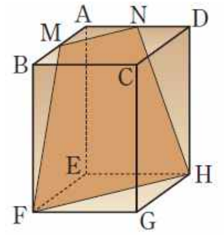


06 공간도형

기하와 벡터 교과서 Review

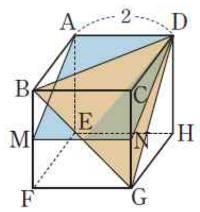
문제 16

오른쪽 그림의 직육면체에서 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=2$, $\overline{AE}=3$이다. 모서리 AB, AD의 중점을 각각 M, N이라 하고 직선 CG와 평면 MFHN이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라.



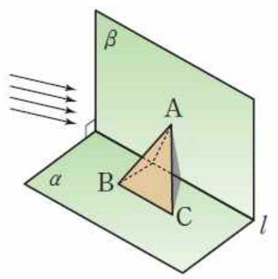
문제 17

오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 모서리 BF, CG의 중점을 각각 M, N이라고 하자. 이때 두 평면 BGD와 AMND가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



문제 18

수직인 두 평면 α, β와 그 교선 l에 대하여 한 변의 길이가 $8\sqrt{3}$인 정삼각형 모양의 판 ABC가 평면 α에 변 BC를 두고, 평면 β에 꼭짓점 A를 둔 채 기대어 있다. 햇빛이 평면 α에 30°의 각을 이루면서 정삼각형 모양의 판에 수직으로 비출 때, 두 평면 α, β에 나타나는 정삼각형 모양의 판 ABC의 그림자의 넓이를 구하여라. (단, 변 BC와 교선 l은 서로 평행하며 정삼각형 모양의 판의 두께는 무시한다.)

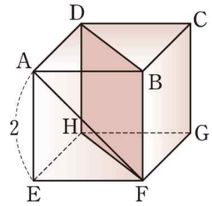


06 공간도형

기하와 벡터 교과서 Review

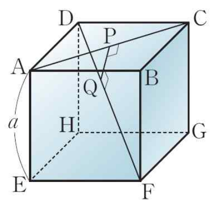
문제 19

오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 모서리 AF의 평면 DHFB 위로의 정사영의 길이를 구하여라.



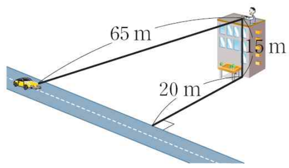
문제 20

오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 a인 정육면체에서 선분 AC 위의 점 P와 선분 DF 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ가 두 선분 AC, DF와 각각 수직일 때, 선분 PQ의 길이를 구하여라.



문제 21

오른쪽 그림과 같이 높이가 15 m인 건물과 직선 도로의 최단 거리가 20 m인 직선 도로가 있다. 이 건물의 옥상에서 최대 송신 거리가 65 m인 리모컨으로 도로 위를 움직이는 모형 자동차를 조종할 때, 리모컨으로 모형 자동차를 조종할 수 있는 도로의 총 길이를 구하여라. (단, 직선 도로의 폭은 무시한다.)

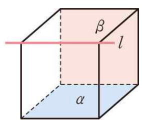


06 공간도형

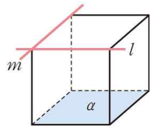
기하와 벡터 교과서 Review

〈정답 및 해설〉 기하와 벡터 – 6단원. 공간도형

1. (1) 거짓 (2) 거짓

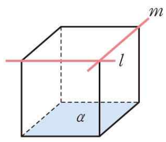


$l \,/\!/\, \alpha$, $l \,/\!/\, \beta$이지만 $\alpha \perp \beta$

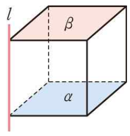


$l \,/\!/\, \alpha$, $m \,/\!/\, \alpha$이지만 $l \perp m$

(3) 거짓 (4) 참



$l \,/\!/\, \alpha$, $l \perp m$이지만 $m \,/\!/\, \alpha$



$\alpha \,/\!/\, \beta$, $l \perp \alpha$이면 $l \perp \beta$

2.

삼각형 BCM은 이등변삼각형이므로 $\overline{BC}$의 중점을 N이라고 하면

$$\overline{MN} \perp \overline{BC}$$

또 삼각형 BCD에서 $\overline{DN} \perp \overline{BC}$이므로

$$\theta = \angle MND$$

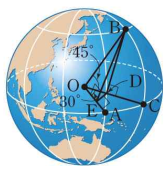
$\overline{NM} \perp \overline{AD}$이므로 $\cos\theta = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{DN}}$

정사면체의 한 변의 길이를 a라고 하면

$$\overline{DN} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \overline{MN} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

따라서 $\cos\theta = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{DN}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

3. 적도 상에 있는 동경 180°인 지점을 C라 하고, 점 B에서 $\overline{OC}$에 내린 수선의 발을 D, 점 D에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 E라고 하자.



이때 삼수선의 정리 ❶에 의하여

$$\angle BEO = 90^\circ$$

$\angle BOD = 45^\circ$, $\angle DOE = 30^\circ$이므로 $\overline{OB} = a$로 놓으면

$$\overline{OD} = \overline{OB}\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\overline{OE} = \overline{OD}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

따라서 직각삼각형 OBE에서

$$\cos\theta = \frac{\overline{OE}}{\overline{OB}} = \frac{\sqrt{6}}{4}a \div \frac{\sqrt{6}}{4}$$

4. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5.

타원의 장축의 길이는

$$\frac{4\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8$$

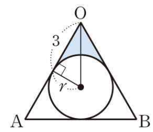
타원의 단축의 길이는 밑면인 원의 지름의 길이와 같으므로 $4\sqrt{3}$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

6.



△OAB의 내접원의 반지름의 길이를 r라고 하면

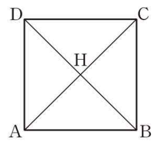
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = \left(\frac{1}{2} \times 6 \times r\right) \times 3$$

$$r = \sqrt{3}$$

이므로 △OAB의 내접원의 넓이는 3π이다.

어두운 부분의 넓이는 △OAB에서 위의 그림의 색칠한 부분의 평면 ABCD 위로의 정사영의 넓이의 4배와 같다. 이때 색칠한 부분의 넓이는

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 - 3\pi\right) \cdot \frac{1}{3} = 3\sqrt{3} - \pi$$



평면 OAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하고 점 O의 평면 ABCD 위로의 정사영을 H라고 하면 △OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영이 △HAB이므로

$$\cos\theta = \frac{\triangle HAB}{\triangle OAB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

어두운 부분의 넓이를 구하면

$$(3\sqrt{3} - \pi) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4 = 12 - \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi$$

따라서 $a = 12$, $b = -\dfrac{4}{3}$이므로 $ab = -16$

7. $\overline{DH} \perp$ (면 EFGH), $\overline{DI} \perp \overline{MG}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{HI} \perp \overline{MG}$$

직각삼각형 MFG에서

$$\overline{MG} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$$

이때

$$\triangle MGH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50$$

이므로

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{MG} \cdot \overline{HI} = 50$$

$$\overline{HI} = 50 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{10^2 + (4\sqrt{5})^2} = 6\sqrt{5}$$

06 공간도형

기하와 벡터 교과서 Review

8.
주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면

$\overline{MN}=\sqrt{2}a$, $\overline{AG}=\sqrt{3}a$

사각형 AMGN은 마름모이므로

$$\square AMGN=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a\cdot\sqrt{3}a=\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$$

이때 사각형 AMGN의 평면 EFGH 위로의 정사영은 사각형 EFGH이므로

$$\frac{\sqrt{6}}{2}a^2\cos\theta=a^2$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

9. 오른쪽 그림과 같이 지면과 판이 이루는 각의 크기가 $30°$일 때, 그림자의 넓이가 최대이다. 구하는 그림자의 최대 넓이를 S라고 하면

$$S\cos 30°=9^2-\pi\cdot 3^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}S=9(9-\pi)$$

$$S=6\sqrt{3}(9-\pi)$$

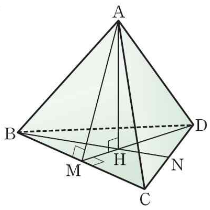
10. △ABD에서 $\overline{EH}/\!/\overline{BD}$이고 $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$

△CBD에서 $\overline{FG}/\!/\overline{BD}$이고 $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$

따라서 $\overline{EH}/\!/\overline{FG}$, $\overline{EH}=\overline{FG}$이다.

점 E, F, G, H는 한 평면에 있으므로 □EFGH는 평행사변형이다.

11.
(1)



정사면체 ABCD에서 모서리 BC의 중점을 M이라고 하면 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$, $\overline{DM}\perp\overline{BC}$

점 A에서 $\overline{DM}$에 내린 수선은 삼수선의 정리에 의하여 밑면 BCD의 수선이 된다. 따라서 점 H는 $\overline{DM}$ 위에 있다.

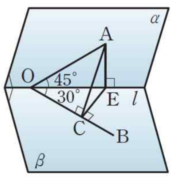
또 $\overline{CD}$의 중점을 점 N이라고 하면 마찬가지로 점 H는 $\overline{BN}$ 위에 있다.

따라서 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이다.

(2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. $3\sqrt{13}\pi\text{cm}^2$

13.



점 A에서 교선 l 위에 내린 수선의 발을 E라고 하면

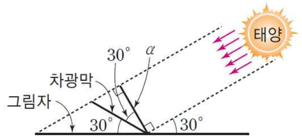
$\alpha\perp\beta$이므로 $\overline{AE}\perp\beta$이다. 또 점 E에서 직선 OB에 내린 수선의 발을 C라고 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AC}\perp\overline{OB}$이다.

이때 $\overline{AE}=a$라고 하면

$$\overline{OA}=\sqrt{2}a,\ \overline{OE}=a,\ \overline{OC}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

따라서 $\cos(\angle AOC)=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

14.
다음 그림과 같이 차광막의 햇빛에 수직인 평면 위로의 정사영을 α라고 하면



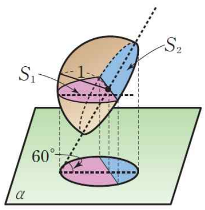
$$(\alpha\text{의 넓이})=(\text{그림자의 넓이})\times\cos 60°$$

$$=24\times\frac{1}{2}=12$$

$(\alpha$의 넓이$)=($차광막의 넓이$)\times\cos 30°$이므로

$$(\text{차광막의 넓이})=12\times\frac{2}{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$$

15.



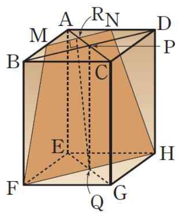
구하려는 정사영은 반구의 밑면의 중심을 지나고 평면 α와 평행한 면으로 자를 때 생기는 단면 S_1과 반구의 밑면에서 반원 S_2의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형이다.

따라서 구하려는 정사영의 넓이는

$$S_1+S_2\cos 60°=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\times\cos 60°$$

$$=\frac{3\pi}{4}$$

16.



$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 P, $\overline{EG}$와 $\overline{FH}$의 교점을 Q, $\overline{AC}$와 $\overline{MN}$의 교점을 R라고 하자.

이때 (평면 ABCD)$\perp\overline{PQ}$, $\overline{PR}\perp\overline{MN}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{QR}\perp\overline{MN}$

또 $\overline{CG}/\!/\overline{PQ}$이므로 직선 CG와 평면 MFHN이 이루는 각의 크기 θ는 두 직선 PQ와 RQ가 이루는 각의 크기와 같다. 즉, $\theta=\angle PQR$이다.

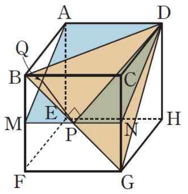
$\overline{PQ}=3$, $\overline{PR}=\frac{1}{4}\overline{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$\tan\theta=\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

06 공간도형

기하와 벡터 교과서 Review

17.



선분 MN과 선분 BG의 교점을 P라고 하면 평면 BGD와 평면 AMND의 교선은 직선 DP이다.

또 교선 DP의 한 점 P를 지나면서 교선 DP와 수직인 직선이 선분 AM과 만나는 점을 Q라고 하자.

이때 두 평면 BGD, AMND의 교선 DP에 대하여

$\overline{DP}\perp\overline{PB}$, $\overline{DP}\perp\overline{PQ}$

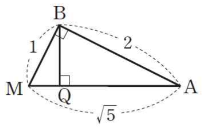
이므로 두 평면이 이루는 각의 크기 θ는 직선 PB와 직선 PQ가 이루는 각의 크기와 같다. 즉, $\theta=\angle BPQ$이다.

삼각형 BMP에서 $\overline{PB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

삼각형 DNP에서 $\overline{DN}\perp\overline{PN}$이므로 삼각형 DNP는 직각삼각형이다.

$\angle DPN=\angle PQM$이므로 $\triangle DNP \backsim \triangle PMQ$에서

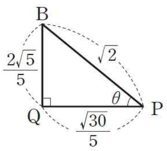
$$\overline{PQ}=\frac{\overline{PM}\times\overline{DP}}{\overline{DN}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$$



$\triangle BMA \backsim \triangle QMB$에서

$\angle BQM=90^\circ$이므로

$$\overline{BQ}=\frac{\overline{MB}\times\overline{BA}}{\overline{MA}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$



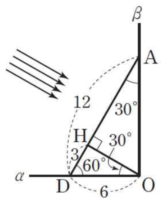
삼각형 BQP에서

$\overline{BQ}^2+\overline{PQ}^2=\overline{PB}^2$이므로

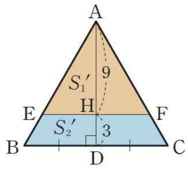
$\angle PQB=90^\circ$

따라서 $\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{5}$

18.



꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 두 점 A, D에서 교선 l에 내린 수선의 발을 O라고 하자. 점 O에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라고 하면 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.



삼각형 ABC에서 점 H를 지나고 변 BC에 평행한 직선이 두 변 AB, AC와 만나는 점을 각각 E, F라고 하자. 이때 삼각형 AEF의 그림자는 평면 β에, 사각형 EBCF의 그림자는 평면 α에 생긴다. 이때 삼각형 AEF의 넓이를 S_1', 사각형 EBCF의 넓이를 S_2'이라고 하면

$\overline{EF}=\frac{9}{12}\times\overline{BC}=6\sqrt{3}$이므로

$$S_1'=\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times9=27\sqrt{3}$$

$$S_2'=\frac{1}{2}\times(6\sqrt{3}+8\sqrt{3})\times3=21\sqrt{3}$$

각 그림자의 넓이를 S_1, S_2라고 하면

$S_1\cos30^\circ=S_1'$

$S_1=27\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=54$

$S_2\cos60^\circ=S_2'$

$S_2=21\sqrt{3}\times2=42\sqrt{3}$

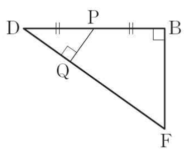
따라서 구하려는 그림자 전체의 넓이는 $54+42\sqrt{3}$이다.

19. $\sqrt{6}$

20.

$\overline{BF}\perp\overline{AC}$이고, $\overline{BD}\perp\overline{AC}$이므로 $\triangle BDF\perp\overline{AC}$

따라서 점 P는 $\overline{BD}$ 위의 점이므로 사각형 ABCD의 대각선의 교점이다.



삼각형 BDF에서 $\overline{BF}=a$,

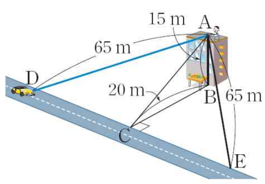
$\overline{DP}=\frac{\overline{DB}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $\overline{DF}=\sqrt{3}a$

$\triangle BDF \backsim \triangle QDP$이므로

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{DP}},\quad \frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{\overline{PQ}}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}$$

따라서 $\overline{PQ}=\frac{\sqrt{6}}{6}a$

21.



오른쪽 그림에서

$\overline{AB}\perp\overline{BC}$, $\overline{BC}\perp\overline{DE}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AC}\perp\overline{DE}$

$\overline{AC}=25(\mathrm{m})$이므로

$\overline{CD}=\sqrt{65^2-25^2}$

$=60(\mathrm{m})$

따라서 리모컨으로 모형 자동차를 조종할 수 있는 도로의 총 길이는

$\overline{DE}=\overline{CD}+\overline{CE}=2\overline{CD}=120(\mathrm{m})$