

# 01 지수함수와 로그함수

## 미적분II 교과서 Review

### 문제 1

함수  $y = 2^{x-1} - 5$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 |보기|에서 있는 대로 고른 것은? <sup>1)</sup>

|보기|

ㄱ.  $y = 2^x$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프이다.

ㄴ. 그래프는 점  $(0, -\frac{9}{2})$ 를 지난다.

ㄷ. 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

ㄹ.  $x$ 의 값이 증가하면  $y$ 의 값도 증가한다.

- ① ㄱ      ② ㄱ, ㄴ      ③ ㄴ, ㄹ      ④ ㄱ, ㄴ, ㄹ      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

### 문제 2

함수  $y = 2^{x-1}$ 의 그래프를 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 후,  $x$ 축에 대하여 대칭이동하였다. 다시 이 그래프를  $x$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동하였더니 함수  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-a) - b$ 의 그래프와 일치했다. 이때  $a+b$ 의 값은? <sup>2)</sup>

- ① 3      ② 4      ③ 5      ④ 6      ⑤ 7

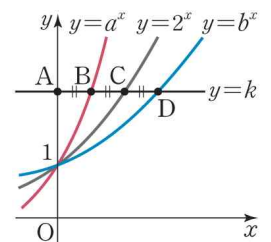
### 문제 3

오른쪽 그림과 같이 직선

$x=0$ , 함수  $y=a^x$ ,  $y=2^x$ ,  $y=b^x$ 의 그래프가 직선  $y=k$ 와 만나는 점을 차례대로 A, B, C, D라고 하자.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ 일 때, 실수  $a, b$ 의 값을 각각 구하여라. <sup>3)</sup>

(단,  $k > 1$ )



### 문제 4

방정식  $|3^x - 1| = k$ 가 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 실수  $k$ 의 값의 범위를 구하여라. <sup>4)</sup>

# 01 지수함수와 로그함수

## 미적분II 교과서 Review

### 문제 5

함수  $y = a^{x^2 - 4x + 7}$ 이 최댓값  $\frac{1}{27}$ 을 가질 때, 상수  $a$ 의 값을 구하여라. 5)

### 문제 6

$x$ 에 대한 방정식  $4^{2x} + a \cdot 4^{x+1} + 8 = 0$ 의 두 근의 비가 1:2일 때, 실수  $a$ 의 값은? 6)

- ①  $-\frac{5}{2}$       ②  $-\frac{3}{2}$       ③  $-\frac{1}{2}$       ④  $\frac{1}{3}$       ⑤  $\frac{1}{2}$

### 문제 7

부등식  $4^x - a \cdot 2^{x+2} \geq -4$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립하도록 하는 실수  $a$ 의 값의 범위는? 7)

- ①  $a \geq 1$                                       ②  $a \geq 2$   
 ③  $a \leq 1$                                       ④  $1 \leq a \leq 2$   
 ⑤  $0 \leq a \leq 1$  또는  $a \geq 2$

### 문제 8

온도가  $T_0$  °C인 어떤 물체를 주위의 온도가  $T_s$  °C인 곳에 놓고  $t$ 분 후의 이 물체의 온도를  $T$  °C라고 하면

$$t = -10 \log \frac{T - T_s}{T_0 - T_s}$$

가 성립한다고 하자. 온도가 100 °C인 물체를 온도가 20 °C로 일정한 실내에 놓을 때, 10분 후의 이 물체의 온도를 구하여라. (단,  $T_0 \neq T_s$ ) 8)

# 01 지수함수와 로그함수

## 미적분II 교과서 Review

### 문제 9

어느 자동차 회사의 영업 사원의 수  $x$ 명과 판매 실적  $y$ 대 사이에는

$$y = c \times x^{k^2+2k-1} \quad (c \text{는 상수})$$

인 관계가 있다고 한다. 올해는 작년보다 영업 사원의 수를 50% 늘려 작년에 비해 2.25배의 판매 실적을 올렸다. 이때 양수  $k$ 의 값을 구하여라.<sup>9)</sup>

### 문제 10

다음 중 로그함수  $y = \log_5(x-2) + 3$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?<sup>10)</sup>

- ① 점근선은  $x$ 축이다.
- ② 정의역은  $\{x | x > 2\}$ 이다.
- ③ 치역은 실수 전체의 집합이다.
- ④  $x$ 의 값이 증가하면  $y$ 의 값도 증가한다.
- ⑤  $y = \log_5 x$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 2만큼,  $y$ 축의 방향으로 3만큼 평행이동하여 얻어진다.

### 문제 11

다음 보기에서 함수의 그래프가 원점에 대하여 대칭인 것끼리 짝지어진 것을 모두 고른 것은?<sup>11)</sup>

보기

ㄱ.  $y = 3^x, y = \log_3 x$

ㄴ.  $y = 3^x, y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$

ㄷ.  $y = \log_2 x, y = \log_{\frac{1}{2}} x$

ㄹ.  $y = -\log_2 x, y = -\log_{\frac{1}{2}}(-x)$

- ① ㄱ, ㄴ
- ② ㄱ, ㄷ
- ③ ㄴ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄹ
- ⑤ ㄷ, ㄹ

### 문제 12

네 점  $A(3, -1), B(5, -1), C(5, 2), D(3, 2)$ 를 연결하여 만든 직사각형 ABCD가 있다. 함수  $y = \log_a(x-1) - 4$ 의 그래프가 직사각형 ABCD와 만나기 위한  $a$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라고 할 때,  $\left(\frac{M}{m}\right)^{12}$ 의 값은? (단,  $a > 1$ )<sup>12)</sup>

- ① 1
- ② 8
- ③ 64
- ④ 82
- ⑤ 120

# 01 지수함수와 로그함수

## 미적분II 교과서 Review

### 문제 13

$a > 0, a \neq 1$ 일 때 함수  $f(x) = a^{x-3} + 2$ 의 역함수를  $g(x)$ 라고 하면 두 함수  $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프는 점  $(b, 4)$ 에서 만난다. 이때  $a - b$ 의 값은?<sup>13)</sup>

- ① -4                      ② -2                      ③ 0  
 ④ 2                        ⑤ 4

### 문제 14

연립부등식

$$\begin{cases} \log_3(x^2 + y^2 - 3) < 1 \\ \log_{0.3}y > \log_{0.3}x \end{cases}$$

를 만족하는 점  $(x, y)$ 가 나타내는 영역의 넓이를 구하여라.<sup>14)</sup>

### 문제 15

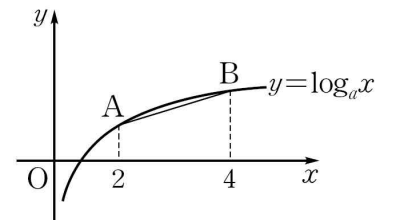
모든 양수  $x$ 에 대하여 로그부등식

$(\log x)^2 + \log 100x - k \geq 0$ 이 성립하도록 하는 실수  $k$ 의 값의 범위는?<sup>15)</sup>

- ①  $k \geq -\frac{7}{4}$                       ②  $k > -\frac{7}{4}$                       ③  $-\frac{7}{4} \leq k \leq \frac{7}{4}$   
 ④  $k < \frac{7}{4}$                         ⑤  $k \leq \frac{7}{4}$

### 문제 16

오른쪽 그림과 같이 함수  $y = \log_a x$ 의 그래프 위에 두 점 A, B가 있다. 두 점 A, B의 중점을 지나면서  $x$ 축에 평행한 직선과  $y = \log_a x$ 의 그래프의 교점의  $x$ 좌표가  $b$ 일 때, 양수  $b$ 의 값을 구하여라.<sup>16)</sup>



# 01 지수함수와 로그함수

## 미적분II 교과서 Review

### 문제 17

두 양수  $a, b$ 가  $a+b=6$ 을 만족시킬 때,  $\log_3 3a + \log_3 9b$ 의 최댓값은? <sup>17)</sup>

- ① 3                      ② 4                      ③ 5                      ④ 6                      ⑤ 7

### 문제 18

LED 전구를 생산하는 어떤 회사의 한 해 매출액이 2009년도에는 100억 원이었는데, 매해  $r\%$  증가하여 2014년도에는 400억 원으로 증가했다고 한다.  $r$ 의 값을 구하여라. (단,  $\log 2 = 0.30$ ,  $\log 1.32 = 0.12$ 로 계산한다.) <sup>18)</sup>

### 문제 19

용액의 산성도를 나타내는 pH는 용액 1 L의 수소 이온 농도(mol/L)의 역수에 대한 상용로그의 값으로 계산한다. 즉, 수소 이온 농도가  $x$  mol/L일 때, 산성도(pH)를  $y$ 라고 하면  $y = \log \frac{1}{x}$ 의 관계식이 성립한다. 산성도가 5.5인 빗물 1 L의 수소 이온 농도는 산성도가 7인 빗물 1 L의 수소 이온 농도의 몇 배인가? <sup>19)</sup>

- ①  $10^{1.5}$  배                      ②  $10^{1.6}$  배                      ③  $10^{1.7}$  배  
④  $10^{1.8}$  배                      ⑤  $10^{1.9}$  배

**<정답 및 해설> 미적분Ⅱ - 단원. 지수함수와 로그함수**

1) ㄷ. 제 1 사분면, 제 3 사분면, 제 4 사분면을 지난다.  
 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

2)  $y = 2^{x-1}$ 의 그래프를 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면  $x = 2^{y-1} \therefore y = \log_2 x + 1$   
 이것을 다시  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 식은  
 $y = -\log_2 x - 1 = \log_{\frac{1}{2}} x - 1$   
 다시  $x$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면  
 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) - 1$ 이므로  $a = 2, b = 1$   
 $\therefore a + b = 3$

3)  $a = 4, b = \sqrt[3]{4}$

4)  $0 < k < 1$

5)  $f(x) = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$ 이라고 하면 함수  $f(x)$ 는  $x = 2$ 에서 최솟값 3을 가지므로 주어진 함수가 최댓값을 가지려면  $0 < a < 1$ 이어야 한다. • 2점

**답 구하기** 주어진 함수의 최댓값이  $\frac{1}{27}$ 이므로  
 $a^3 = \frac{1}{27}$ 에서  $a = \frac{1}{3}$

6)  $4^{2x} + a \cdot 4^{x+1} + 8 = 0$ 에서  $4^x = X (X > 0)$ 로 놓으면  $X^2 + 4aX + 8 = 0$  .....①  
 주어진 방정식의 두 근을  $\alpha, 2\alpha$ 라고 하면 ①의 두 근은  $4^\alpha, 4^{2\alpha}$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여  $4^\alpha + 4^{2\alpha} = -4a, 4^\alpha \cdot 4^{2\alpha} = 8$   
 $4^\alpha \cdot 4^{2\alpha} = 8$ 에서  $2^{2\alpha} \cdot 2^{4\alpha} = 2^3$   
 $2^{6\alpha} = 2^3, 6\alpha = 3 \therefore \alpha = \frac{1}{2}$

이것을  $4^\alpha + 4^{2\alpha} = -4a$ 에 대입하면  
 $4^{\frac{1}{2}} + 4 = -4a \therefore a = -\frac{3}{2}$

7)  $4^x - a \cdot 2^{x+2} \geq -4$ 에서  $2^x = X (X > 0)$ 로 놓으면  $(X-2a)^2 - 4a^2 + 4 \geq 0$  .....②

(i)  $a > 0$ 일 때,  
 부등식 ②은  $X = 2a$ 일 때 최솟값  $-4a^2 + 4$ 를 가지므로 부등식 ②이  $X > 0$ 인 모든 실수  $X$ 에 대하여 항상 성립하려면  $-4a^2 + 4 \geq 0$   
 $(a+1)(a-1) \leq 0 \therefore -1 \leq a \leq 1$   
 $a > 0$ 이므로  $0 < a \leq 1$

(ii)  $a = 0$ 일 때,  
 $(X-2a)^2 - 4a^2 + 4 = X^2 + 4 \geq 0$ 이므로 부등식 ②은 항상 성립한다.

(iii)  $a < 0$ 일 때,  
 $X = 0$ 이면 ②에서  $(0-2a)^2 - 4a^2 + 4 = 4 \geq 0$ 이므로  $X > 0$ 일 때 부등식 ②은 항상 성립한다.  
 이상에서 구하는  $a$ 의 값의 범위는  $a \leq 1$

8)  $t = 10, T_0 = 100, T_s = 20$ 이므로

$$10 = -10 \log \frac{T-20}{100-20}$$

$$-1 = \log \frac{T-20}{80}$$

$$\frac{T-20}{80} = 10^{-1}$$

$T-20 = 8, \text{ 즉 } T = 28$

따라서 10분 후의 이 물체의 온도는  $28^\circ\text{C}$ 이다.

9) 작년 이 회사의 영업 사원의 수를  $x_0$ 명, 판매 실적을  $y_0$ 대라고 하면

$$y_0 = c \times x_0^{k^2+2k-1} \dots\dots ①$$

올해 이 회사의 영업 사원의 수는  $1.5x_0$ 명, 판매 실적은  $2.25y_0$ 대이므로

$$2.25y_0 = c \times (1.5x_0)^{k^2+2k-1} \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하면

$$2.25 \times c \times x_0^{k^2+2k-1} = c \times (1.5x_0)^{k^2+2k-1}$$

$$2.25 = 1.5^{k^2+2k-1}, 1.5^2 = 1.5^{k^2+2k-1}$$

$$k^2+2k-1 = 2, (k+3)(k-1) = 0$$

이때  $k > 0$ 이므로  $k = 1$

10) ①

11) ④

12) ③

13)  $f(x)$ 의 역함수의 그래프가 점  $(b, 4)$ 를 지나므로  $b = f(4)$   
 즉  $a^{4-3} + 2 = b$ 에서  $a - b = -2$

14)  $\log_3(x^2 + y^2 - 3) < 1$ 에서 밑 3은 1보다 크므로

$$x^2 + y^2 - 3 < 3, \text{ 즉 } x^2 + y^2 < 6 \quad \dots\dots ①$$

$$(\text{진수}) > 0 \text{이므로 } x^2 + y^2 - 3 > 0 \quad \dots\dots ②$$

따라서 ①, ②를 모두 만족하는 범위는

$$3 < x^2 + y^2 < 6 \quad \dots\dots ③$$

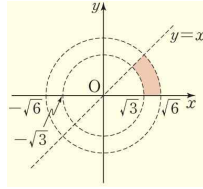
$\log_{0.3} y > \log_{0.3} x$ 에서 밑 0.3은 1보다 작은 양수이므로

$$y < x \quad \dots\dots ④$$

$$(\text{진수}) > 0 \text{이므로 } x > 0, y > 0 \quad \dots\dots ⑤$$

따라서 ④, ⑤를 모두 만족하는 범위는

$$0 < y < x \quad \dots\dots ⑥$$



③, ⑥을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 점  $(x, y)$ 가 나타내는 영역의 넓이는

$$\frac{3}{4}\pi - \frac{3}{8}\pi = \frac{3}{8}\pi$$

15)  $(\log x)^2 + \log 100x - k \geq 0$ 에서  $\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + t + 2 - k \geq 0 \quad \dots\dots ⑦$$

⑦이 모든 실수  $t$ 에 대하여 항상 성립해야 하므로 이차방정식  $t^2 + t + 2 - k = 0$ 의 판별식을  $D$ 라고 하면  $D = 1 - 4(2 - k) \leq 0 \quad \therefore k \leq \frac{7}{4}$

16)  $A(2, \log_a 2), B(4, \log_a 4)$ 이므로 두 점 A, B의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{\log_a 2 + \log_a 4}{2}\right), \text{ 즉 } \left(3, \frac{3}{2}\log_a 2\right) \cdot 2\text{점}$$

**답 구하기** 직선  $y = \frac{3}{2}\log_a 2$ 와  $y = \log_a x$ 의 그래프의 교점의  $x$ 좌표가  $b$ 이므로

$$\frac{3}{2}\log_a 2 = \log_a b$$

$$\therefore b = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

17)  $\log_3 3a + \log_3 9b = \log_3 27ab = 3 + \log_3 ab$

산술평균과 기하평균의 관계에서  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$6 \geq 2\sqrt{ab} \quad \therefore ab \leq 9$$

따라서  $3 + \log_3 ab$ 의 최댓값은  $3 + \log_3 9 = 5$

18) 매해  $r\%$  증가하므로

$$100\left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 400, \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 4$$

양변에 상용로그를 취하면

$$5\log\left(1 + \frac{r}{100}\right) = 2\log 2 = 0.60$$

$$\log\left(1 + \frac{r}{100}\right) = 0.12$$

이때  $\log 1.32 = 0.12$ 이므로

$$1 + \frac{r}{100} = 1.32, \text{ 즉 } r = 32$$

19) 산성도가 5.5일 때의 수소 이온 농도를  $x_1$  mol/L, 산성도가 7일 때의 수소 이온 농도를  $x_2$  mol/L라고 하면

$$5.5 = \log \frac{1}{x_1} \text{에서 } \log x_1 = -5.5$$

$$7 = \log \frac{1}{x_2} \text{에서 } \log x_2 = -7$$

$$\log \frac{x_1}{x_2} = \log x_1 - \log x_2$$

$$= -5.5 - (-7) = 1.5$$

따라서  $\frac{x_1}{x_2} = 10^{1.5}$ 이므로  $10^{1.5}$ 배이다.