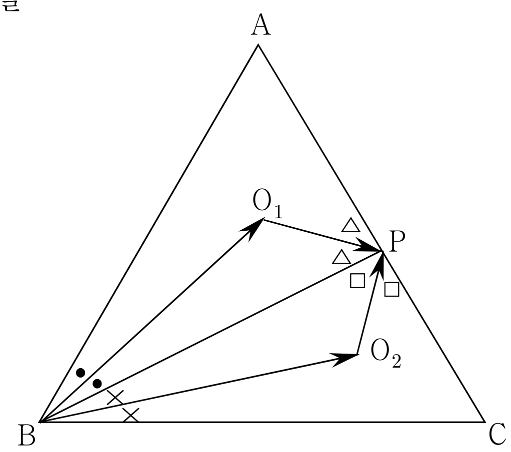
베르테르 모의고사 3회 정답표

1번. ②	2번. ①	3번. ③	4번. ①	5번. ②
6번. ③	7번. ⑤	8번. ③	9번. ⑤	10번. ④
11번. ④	12번. ③	13번. ①	14번. ⑤	15번. ④
16번. ②	17번. ④	18번. ⑤	19번. ③	20번. ④
21번. ③	22번. 50	23번. 10	24번. 36	25번. 216
26번. 54	27번. 100	28번. 12	29번. 243	30번. 20

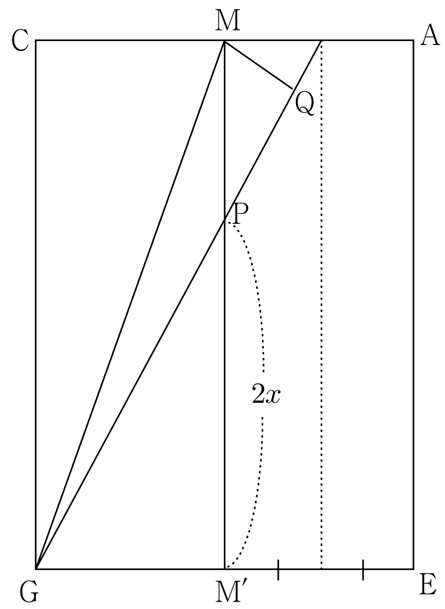
10번 해설



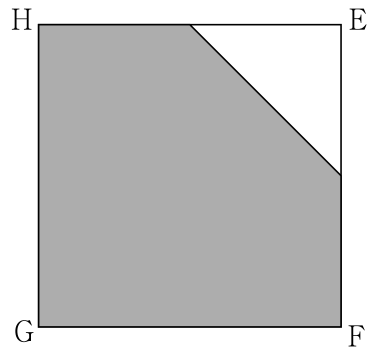
●$+\times=\frac{\pi}{6}$, □$+\triangle=\frac{\pi}{2}$이므로 $|\overrightarrow{BO_1}||\overrightarrow{BO_2}|\cos30^\circ=3$이다. 따라서

$\frac{1}{2}|\overrightarrow{BO_1}||\overrightarrow{BO_2}|\sin30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$입니다. 답은 ④번이 됩니다.

12번 해설.
단면화가 중요한 문제입니다. 평면ACGE로 자른 단면은 다음과 같습니다.



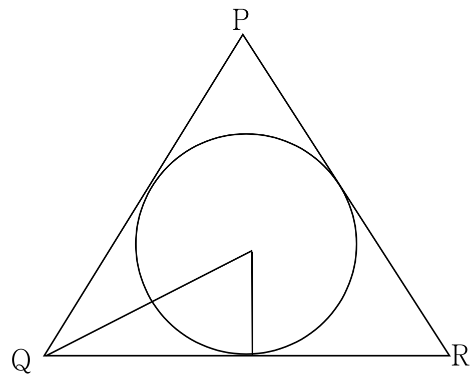
위의 그림에서 $\overline{PM'}=2\overline{PM}$(닮음)이므로 $\overline{PM}=x$라 하면,
$2\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{4x^2+4}+\sqrt{2}=7\sqrt{2}$, $\therefore x=1$이므로
도형의 평면EFGH위로의 정사영은 다음 그림과 같습니다.



따라서 도형의 넓이는 $\frac{7\sqrt{3}}{2}$이고 이 도형의 평면BDG위로의 정사영의 넓이는 $\overline{PQ}=\sqrt{1-\overline{MQ}^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$이므로 (점Q는 점M에서 직선GP에 내린 수선의 발)

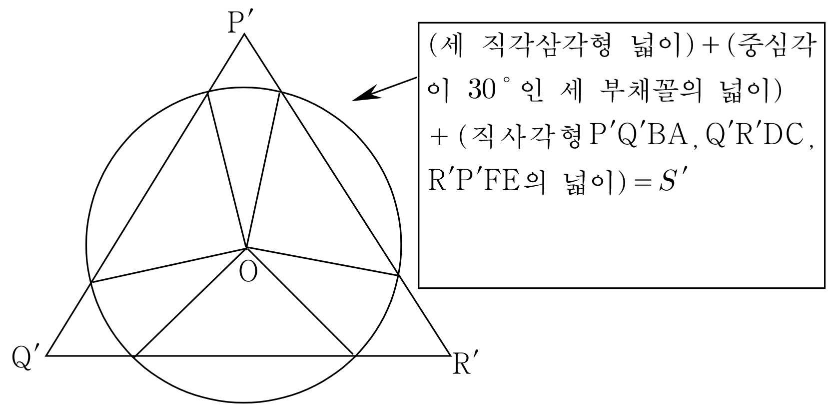
$\frac{7\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}+\overline{PQ}}{\overline{GM}}=\frac{7\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}+\frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{11}}=\frac{14\sqrt{22}}{11}$, 답은 ③

13번-14번 해설. 점Q의 평면α위의 정사영을 Q′라 하면 $\angle ABC-\frac{\pi}{2}=\angle Q'BC=\frac{\pi}{6}$이고 선분BC의 중점M에 대하여 $\overline{MQ'}=\sqrt{3}$이다. $\overline{QQ'}=2\sqrt{6}$이고 구가 삼각형PQR을 포함하는 평면과 만나서 생기는 단면은 다음과 같습니다.



이 원의 반지름의 길이는 $3\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$이므로 원의 중심과 구의 중심과의 거리는 $\sqrt{6-3}=\sqrt{3}$이다. 고로 $2\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{3}$이 육각기둥의 높이가 됩니다. 따라서 정답은 ①

14번 해설



$S\cos60^\circ=S'$이고, $S'=\frac{3}{2}\pi+9+36\sqrt{3}$이므로 정답은 ⑤

15번 해설

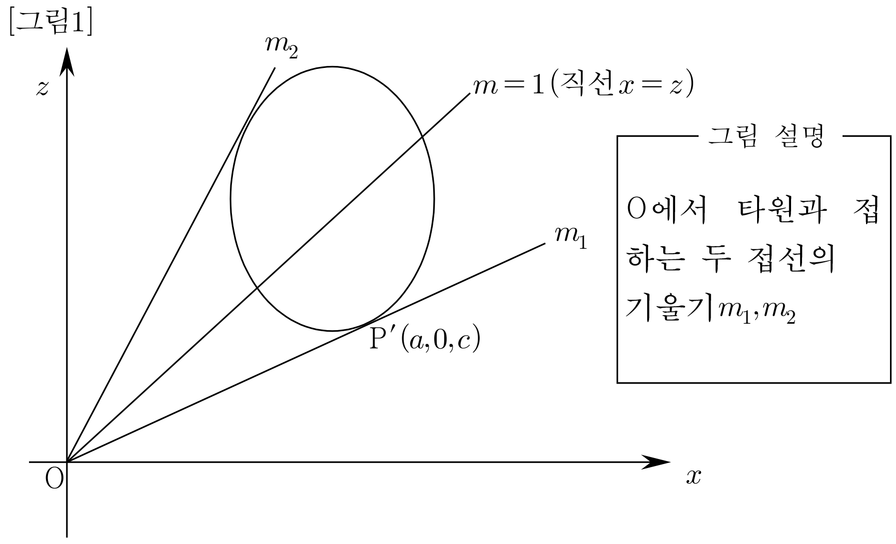
점P가 평면$x=y$ 위의 점이므로 $\mathrm{P}(a,a,c)(a>0,c>0)$라 두면 평면 OAP의 법선벡터는 $z=\frac{c}{a}y$이므로 $(0,\frac{c}{a},-1)$입니다. 점P와 y축을 포함하는 평면의 법선벡터는 $z=\frac{c}{a}x$이므로 $(\frac{c}{a},0,-1)$입니다.

직선l_1의 방향벡터를 (p,q,r)이라 하면 $p+q+r=0$ $\cdot\cdot\cdot\cdot$ (ㄱ), $q\times\frac{c}{a}=r$ $\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ (ㄴ)이므로 두 식(ㄱ),(ㄴ)을 연립하면 직선l_1의 방향벡터는 $(-1-\frac{c}{a},1,\frac{c}{a})$입니다. 직선$l_2$의 방향벡터는 (ㄴ)에서 q를 p로만 바꾸면 되므로 $(1,-1-\frac{c}{a},\frac{c}{a})$가 됩니다. 고로

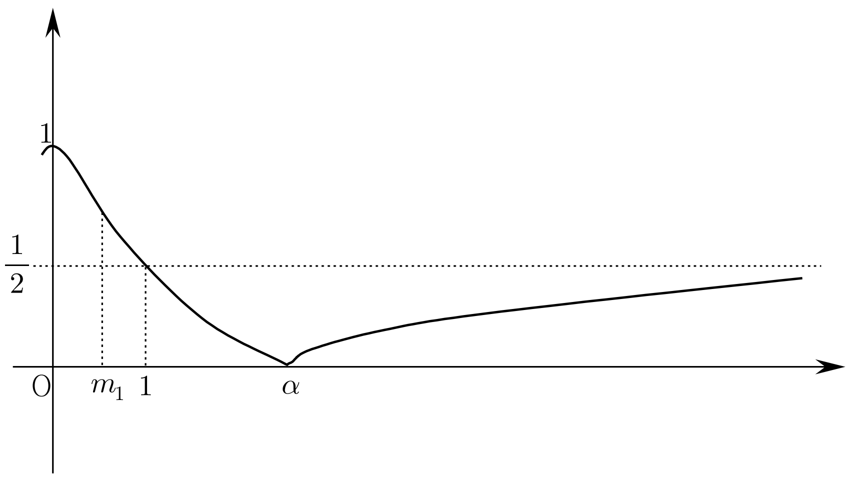
$$|\cos\theta|=\left|\frac{-2-\frac{2c}{a}+\frac{c^2}{a^2}}{2+\frac{2c}{a}+\frac{2c^2}{a^2}}\right|$$의 최댓값을 구하면 됩니다.

점P의 평면xz위로의 정사영은 다음과 같습니다.

[그림1]



결국 $\frac{c}{a}$는 직선OP′의 기울기가 된다. 고로 $\frac{c}{a}=m(m_1\le m\le m_2)$이라 하면 $|\cos\theta|=\left|\frac{-2-2m+m^2}{2+2m+2m^2}\right|=f(m)$이고, 함수$f(m)$의 개형을 자세히 그리기 전에 $\lim_{m\to\infty}f(m)=\frac{1}{2}$이고 m^2-2m-2가 양의 실근과 음의 실근을 가지며 $f(0)=1$이므로 $f(m)=\frac{1}{2}$이 되는 m을 기준으로 생각하면 쉽습니다. 즉, $2+2m-m^2=1+m+m^2$의 양의 실근이 1이므로

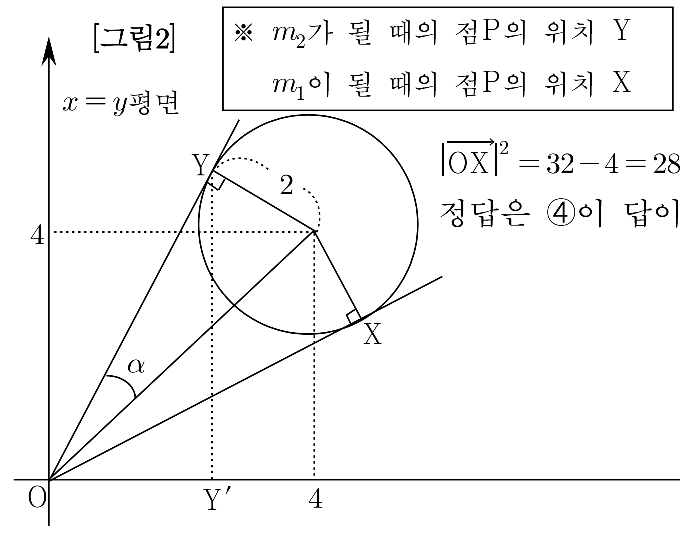


〔그림1〕에서 $m_1<1<m_2$이므로 $f(m_1)>\frac{1}{2}$이 됩니다. $m_1\le m\le m_2$이므로 $\{f(m_1)\}^2$이 최대가 됩니다.(구간$(1,m_2]$에서 $f(m)<\frac{1}{2}$이므로 구간$[m_1,1]$에서만 고려하면 되기 때문입니다.)

여기서 P′좌표나 m_1을 직접 구할 필요는 없습니다.

왜냐면 이제 평면 $x=y$로 평면화 시켜서 생각합니다. O에서 원C와 접하는 접선의 접점이 X가 됩니다.

[그림2]



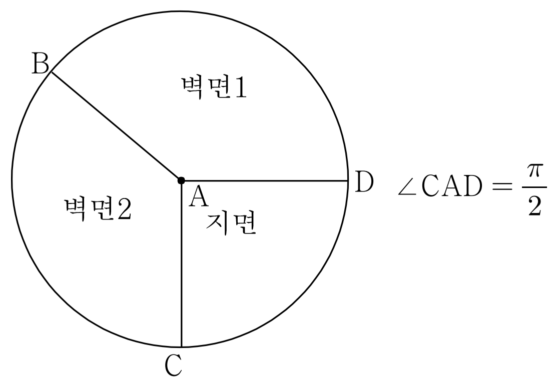
$|\overline{\mathrm{OX}}|^2=32-4=28$이므로 정답은 ④이 답이 됩니다.

16번. 구S의 평면OAP위로의 정사영의 넓이가 4π이므로 평면 OAP가 점P와 y축을 포함하는 평면과 이루는 각의 크기를 θ라 하면, $\cos\theta=\frac{1}{1+\frac{c^2}{a^2}}=\frac{1}{1+m^2}$이므로 $4\pi\cos\theta$에서 m이 최대가 될 때, $\cos\theta$값이 최소가 되므로 정사영의 넓이가 최소가 됩니다. 따라서 위〔그림2〕의 점Y가 해당됩니다. $\overline{\mathrm{YY'}}=2\sqrt{7}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$이므로 $\frac{7+\sqrt{7}}{2}$가 정답이 됩니다. 답은 ②이 됩니다.

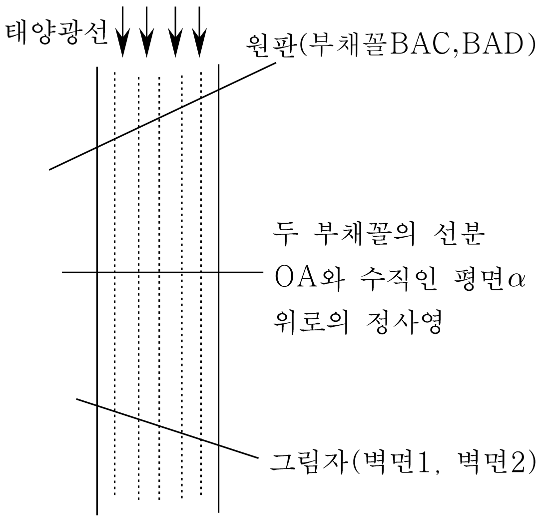
18번 해설

원판을 다음 세 부분으로 나눌 수 있습니다.

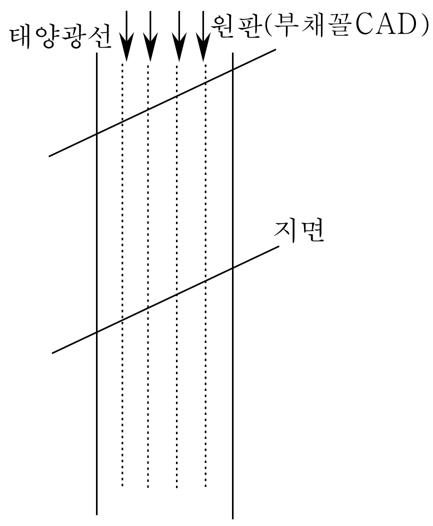
그림〔1〕



즉, 지면은 부채꼴CAD의 그림자가 벽면1에서는 부채꼴 BAD의 그림자, 벽면2는 부채꼴 CAB의 그림자가 생긴다는 것을 알 수 있습니다. (어떻게 알 수 있냐면 두 선분AC,AD는 각각 점A와 x축을 포함하는 평면, 점A와 y축을 포함하는 평면이 원판과 만나서 생기는 교선이기 때문입니다.) 그러므로 다음 그림과 같습니다.



그림〔2〕



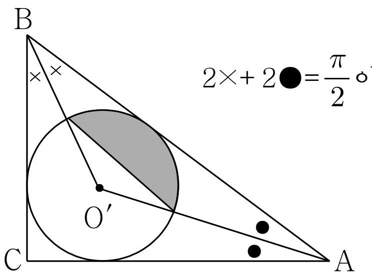
그림〔3〕

부채꼴BAC의 넓이는 $\frac{3}{2}\pi$이고 〔그림2〕에서 $S'=\frac{3}{2}\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}$이고 $S''\cos60^\circ=S'$이므로 $S''=\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$입니다. 따라서 $2\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi+\pi=(3\sqrt{2}+1)\pi$ 답은 ⑤이 됩니다.

19번 해설
두 직선AC, BP가 서로 평행이므로 두 삼각형 ABC, ACP의 넓이는 높이가 서로 같으므로 넓이도 서로 같습니다. 삼각형 ADP의 넓이가 $14\sqrt{3}$이고, 점A의 직선CD에 내린 수선의 발을 E라 합시다. 그럼 $\overline{EP}=3$이므로 $\overline{EH}=4$가 되어 $a=\frac{1}{2}\times4\times2=4$가 됩니다.

두 평면AHD, ABC가 이루는 각의 크기θ에 대하여 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$이고 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ACP의 넓이와 같으므로 삼각형 ABC의 넓이는 $4\sqrt{3}$이고, $b=4\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=4$ 따라서 정답은 ③

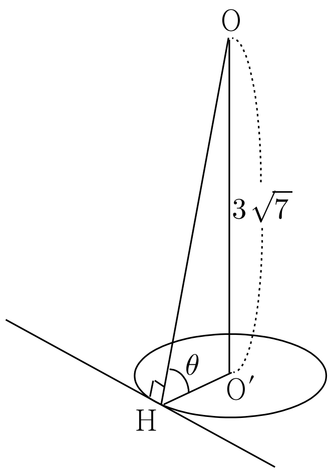
20번 해설
다음 그림과 같이 색칠된 활꼴의 넓이가 단면의 정사영의 넓이가 됩니다.



$2\times+2●=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle BO'A=\pi-(●+\times)$

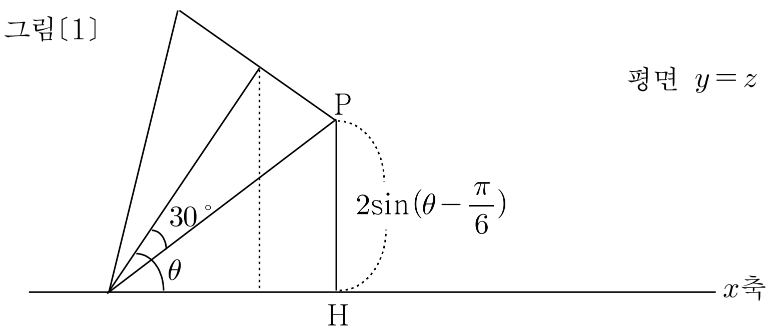
$\times+●=\frac{\pi}{4}$이므로

즉 이 색칠된 활꼴의 넓이는
$\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{8}\pi-\frac{\sqrt{2}}{4}$입니다.
내접원의 반지름의 길이가 1이므로 $\overline{OH}=\sqrt{63+1}=8$이 되고 $(\frac{3}{8}\pi-\frac{\sqrt{2}}{4})\frac{1}{\cos\theta}=3\pi-2\sqrt{2}$ 따라서 정답은 ④번이 됩니다.

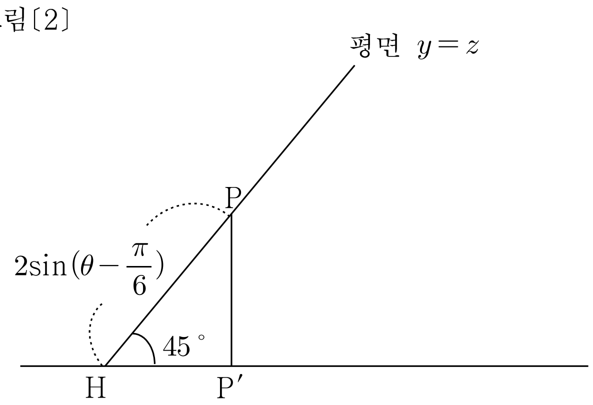


21번 해설.
점P에서 5개의 평면사이의 거리는 각각 $|a|,|b|,|c|,\frac{|b+c|}{\sqrt{2}},\frac{|b-c|}{\sqrt{2}}$ 이므로 원의 넓이의 합은 $5\times400-(a^2+b^2+c^2+\frac{2b^2+2bc-2bc+2c^2}{2})$입니다. 즉, $a^2+2b^2+2c^2$이 최소가 되면 원의 넓이의 합이 최대가 됩니다. $|\overrightarrow{OP}|=2$이므로 $a^2+b^2+c^2=4$이고 $2(a^2+b^2+c^2)-a^2=8-a^2$입니다. 따라서 a^2값이 최대가 되면 $a^2+2b^2+2c^2$이 최소가 됩니다. 따라서 다음 그림과 같습니다. 점P는 평면$x+y+z=3$위의 $A(a,a,a)$를 중심으로 하는 원입니다. 고로 x축과 점A를 포함하는 평면은 $y=z$가 됩니다. 평면$y=z$로 평면화하여 그려보면 다음과 같습니다. 즉, $2\sin(\theta-\frac{\pi}{6})\sin45^\circ=1-\frac{\sqrt{6}}{6}$이 정답이 됩니다.

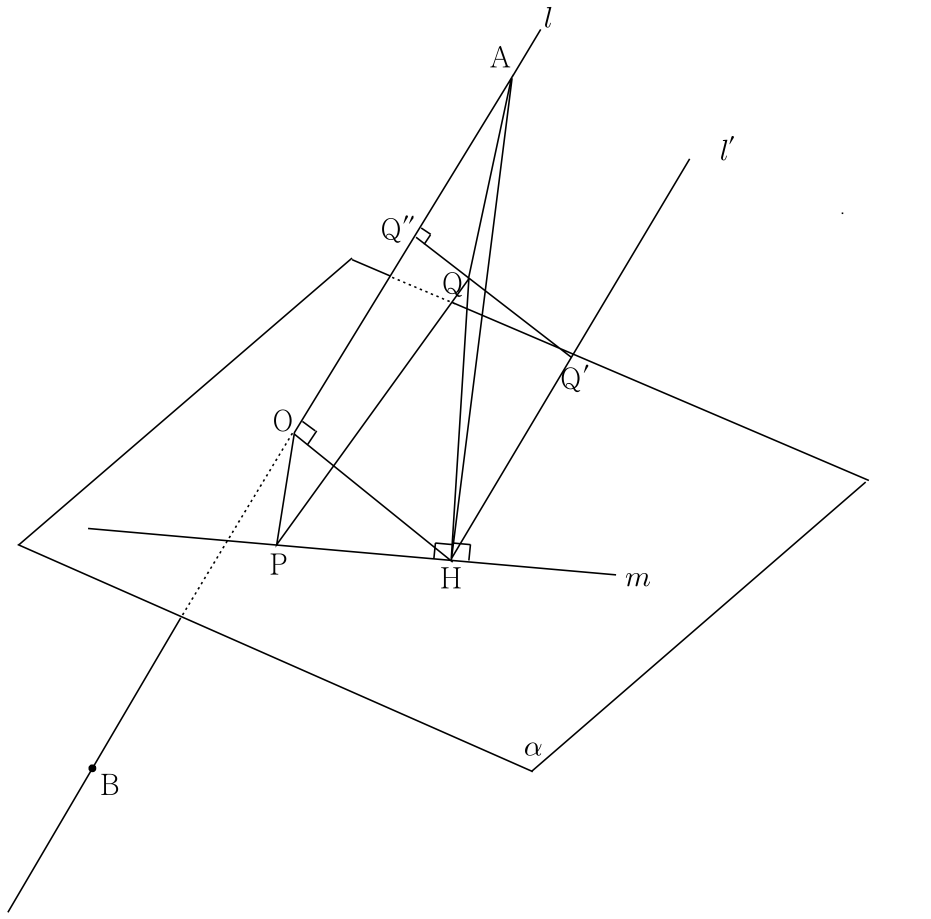
그림〔1〕



그림〔2〕

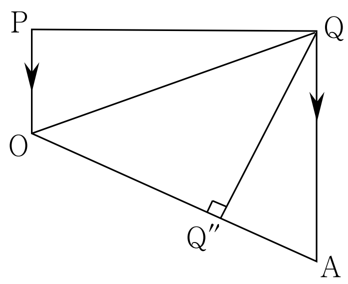


26번 해설
풀이방법이 매우 여러 가지로 풀 수 있는 문제입니다.
그 중 한 가지만 소개하자면



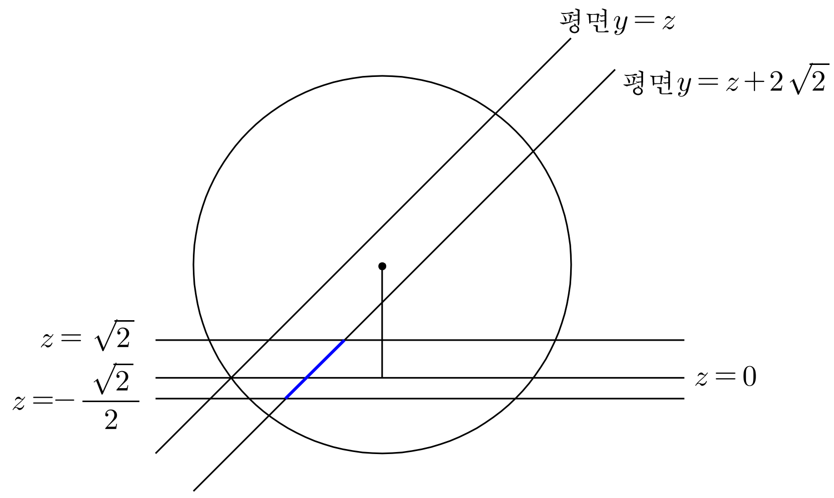
점Q의 평면α위로의 정사영이 H이므로 점Q의 평면 ABH 위로의 정사영은 점H를 지나고 l과 평행한 직선l'위에 있습니다.

두 삼각형OPQ, OQA가 PQ를 높이로 하고 선분OP, QA를 각각 밑변으로 하는 삼각형이므로 넓이비는 1:2입니다.

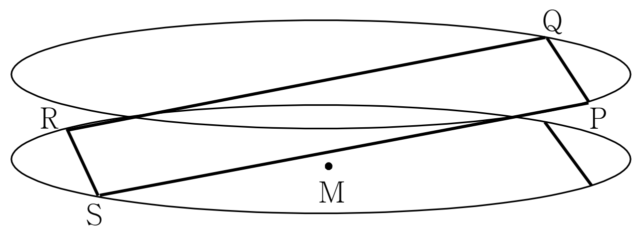


즉, $\overline{Q'Q''}=\overline{OH}=2\sqrt{2}$이므로 삼각형OQA의 평면ABH위로의 정사영의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}=4\sqrt{3}$입니다. 고로 삼각형OPQ의 정사영의 넓이는 넓이비가 1:2이므로
$4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$, $s=4\sqrt{3}+2\sqrt{3}$ 답은 54가 됩니다.

27번 해설.

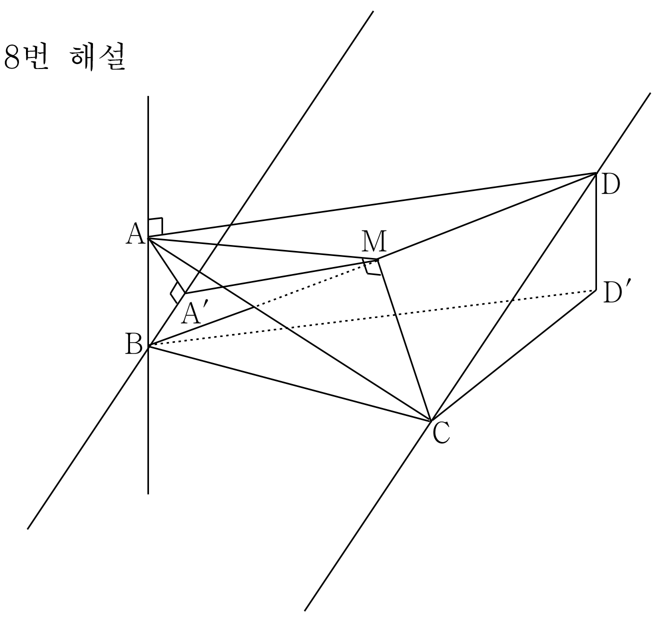


단면화 했을 때 파란색 선분이 R, S가 존재하는 영역이 됩니다.
직선RS가 $z=4\sqrt{2}$와 평행하므로 두 점R, S의 z좌표는 동일합니다.
구가 두 평면 $y=z, y=z+2\sqrt{2}$와 만나서 생기는 두 원을 각각 C_1, C_2라 하면 다음과 같습니다. C_2의 중심을 M이라 하고, 점M과 직선RS사이의 거리를 $x(3\le x\le 6)$라 하면 사각형의 넓이는 $4\sqrt{(49-x^2)(x^2+1)}$ 입니다.



$x^2=t(9\le t\le 36)$라 하면 $t=25$에서 $(49-t)(t+1)$가 최대가 됩니다.
$4\times5\times5=100$이 정답이 됩니다.

28번 해설



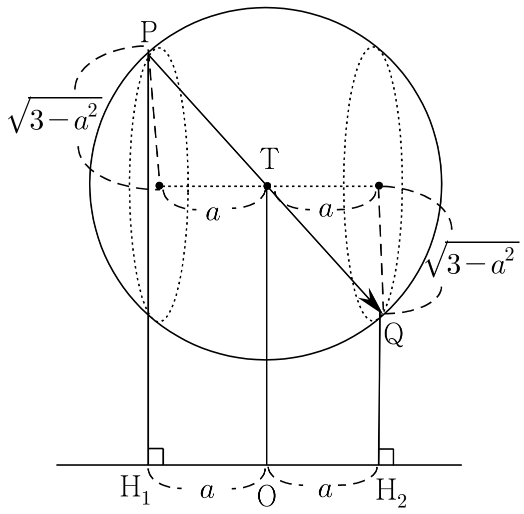
두 직선l, m사이의 거리가 4인데 $\overline{BC}=4$이므로 $\overline{BC}\perp l, \overline{BC}\perp m$ 입니다. 선분AB와 평면BCD가 이루는 예각의 크기는 $\angle ABA'=\angle CDD'$입니다. 삼각형AMC가 직각삼각형임을 이용해도 좋고,
선분CM을 연장한 직선이 직선A′B와 만나는 교점을 P라 하고 점A에서 직선MC에 내린 수선의 발을 H라 하면 닮은비를 이용해서 선분A′H의 길이를 구하여 $\sin\theta$값을 구해도 좋습니다만, 이 문제에서 두 가지방법 중 중요한 것은 점A의 평면 BCD위로의 정사영이 무엇인지 파악하는 것이 어려울 수 있기 때문에 이것만 해결된다면이 문제를 절반 이상 푼 것이나 다름없습니다.

$\sin\theta=\frac{\overline{AA'}}{\overline{AM}}=\frac{\frac{\sqrt{30}}{3}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\therefore 36\times\frac{1}{3}=12$

29번 해설

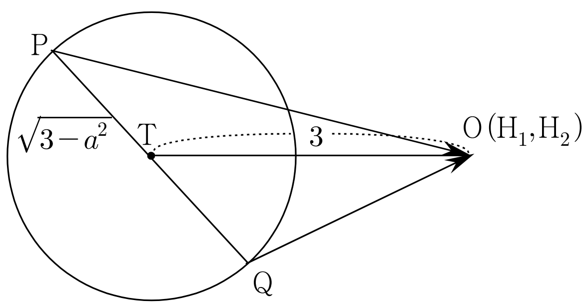
$(\overrightarrow{PH_1}+\overrightarrow{H_1H_2})\cdot(\overrightarrow{QH_2}-\overrightarrow{H_1H_2})=\overrightarrow{PH_1}\cdot\overrightarrow{QH_2}-|\overrightarrow{H_1H_2}|^2=0$이고

점P에서 평면$x=0$에 이르는 거리가 a라면 점P는 구가 평면$x=a$와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점이고 점Q 역시 구의 지름의 양끝점이므로 구가 평면$x=-a$와 만나서 생기는 원 위에 있습니다. 고로 두 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3-a^2}$이 됩니다.



즉 x축이 점으로 보이도록 바라볼 때 이 단면을 단면화하면 다음과 같습니다.

〔그림1〕



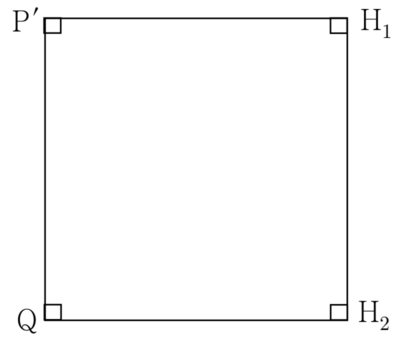
$\overrightarrow{PH_1}\cdot\overrightarrow{QH_2}=(\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{TO})\cdot(\overrightarrow{QT}+\overrightarrow{TO})=(\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{TO})\cdot(-\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{TO})=|\overrightarrow{H_1H_2}|^2$

$-|\overrightarrow{PT}|^2+|\overrightarrow{TO}|^2=-3+a^2+3^2=|\overrightarrow{H_1H_2}|^2=4a^2,\ \therefore a=\pm\sqrt{2}$

즉, 두 평면 $x=-\sqrt{2}, x=\sqrt{2}$위에 있고 반지름의 길이가 1인 원위에 각각 P,Q가 있습니다. 물론 좌표를 이용해서 구해도 됩니다.

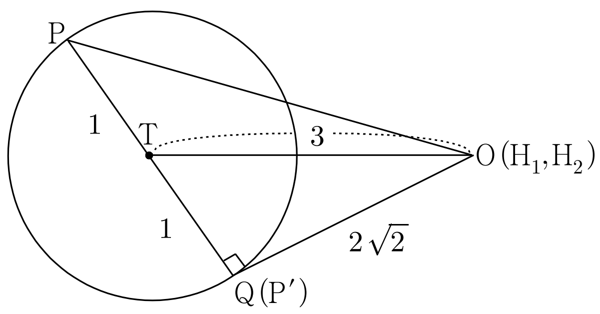
점$P(x,y,z)$라 두면 점Q의 좌표는 $(-x,-y-6,-z)$가 되므로 $\overrightarrow{PH_2}\cdot\overrightarrow{QH_1}=-4x^2-y^2-6y-z^2=0$이고 구의 방정식과 연립하면 $x=\pm\sqrt{2}$임을 알 수 있습니다. 이렇게 구하는 것도 좋은 방법이지만, 첫 번째 풀이방식은 〔그림1〕을 그리는 과정을 거치게 되므로 첫 번째 풀이방식이 29번의 문제풀이에 대한 발상이 비교적 수월하기 때문입니다. 저로써는 두 가지 방법 모두 활용해서 풀어 보는 것을 권유합니다. 사고력 향상에 도움이 될 것이라고 생각합니다. 이제 29번 풀이로 넘어가면 〔그림1〕같은 상황에서 다음과 같습니다.

〔그림2〕



$|\overrightarrow{P'Q}|=|\overrightarrow{H_1H_2}|=2\sqrt{2}$, 즉 x축을 점으로 바라본 단면을 평면화시킬 때, 두 선분$P'Q, H_1H_2$가 서로 평행하므로 선분$P'Q$도 점으로 보일 것입니다.

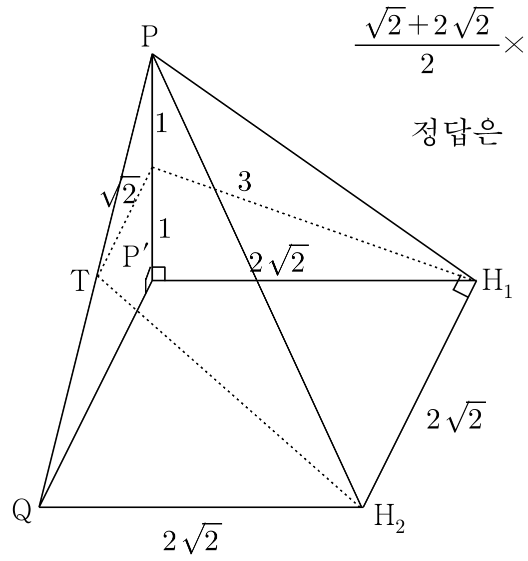
〔그림3〕



〔그림1〕에서 〔그림3〕처럼 생각할 수 있습니다. 즉 그림3의 단면에서 점$\overline{PQ}\perp\overline{OQ}$이므로 다음 사각뿔에서 단면의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}\times 3=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$입니다.

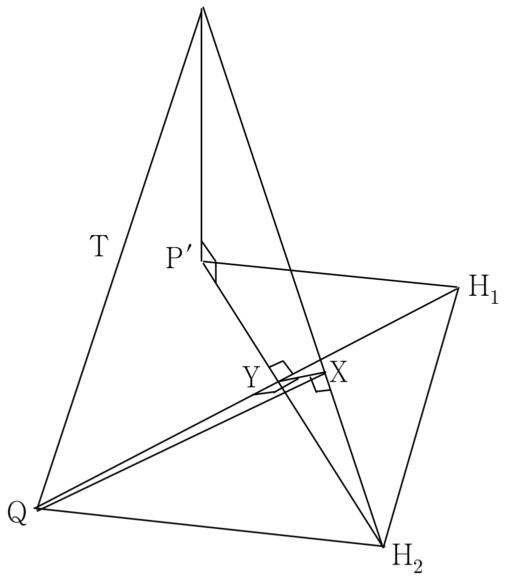
정답은 $6\times\dfrac{81}{2}=243$



30번 해설

왜 출제자가 $\overrightarrow{PH_2} \cdot \overrightarrow{QH_1} = 0$라고 조건을 줬는지를 생각해야 됩니다. 선분XY는 두 직선PH_2, QH_1과 모두 수직이거나 혹은 두 직선 PH_2,QH_1이 만나는 경우에는 X,Y가 서로 한 점으로 일치하게 됩니다. 두 경우 모두 두 직선 PH_2,QH_1사이의 최소거리라고 생각할 수 있습니다. 즉, $\overline{PH_2} \perp \overline{QH_1}$이고 선분$QH_1$은 두 직선$PP'$,$PH_2$와 모두 수직이므로 평면$PP'H_2$위의 직선$P'H_2$와도 수직입니다.

점Q의

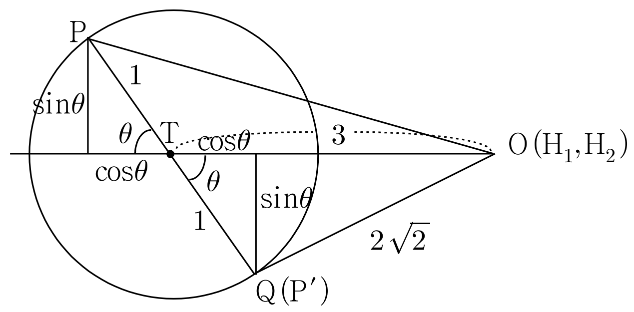


평면 $PP'H_2$위로의 정사영을 Y이라 하고, 직선PH_2의 임의의 점R에서 직선QH_1에 내린 수선의 발은 항상 Y가 됩니다.
($\overline{QH_1} \perp$평면$PP'H_2$),즉 Y에서 직선PH_2에 내린 수선의 발이 X가 됩니다.

$$|\overrightarrow{TX}+\overrightarrow{TY}|^2 = |\overrightarrow{TP}+\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{TQ}+\overrightarrow{QY}|^2 = |\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QY}|^2 = |\overrightarrow{PX}|^2+|\overrightarrow{QY}|^2$$
$$= |\overrightarrow{PY}-\overrightarrow{XY}|^2+|\overrightarrow{QY}|^2 = |\overrightarrow{PY}|^2-|\overrightarrow{XY}|^2+|\overrightarrow{QY}|^2 = 12-|\overrightarrow{XY}|^2$$
이므로

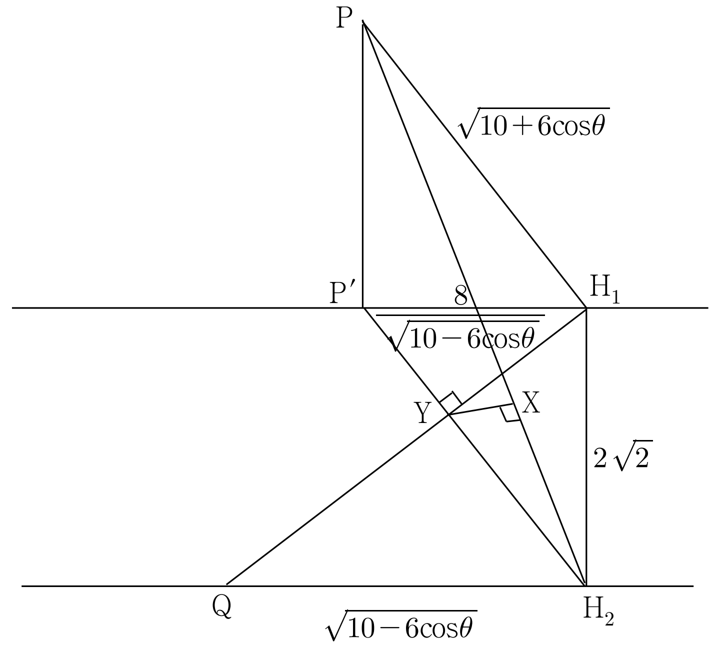
$|\overrightarrow{XY}|^2$가 최대일 때 $|\overrightarrow{TX}+\overrightarrow{TY}|$값이 최소가 됩니다.

〔그림4〕



$\overline{QH_2}$=(그림4에서의 $\overline{QO}$)$= \sqrt{(3-\cos\theta)^2+\sin^2\theta} = \sqrt{10-6\cos\theta}$

$\overline{PH_1}$=(그림4에서의 $\overline{PO}$)$= \sqrt{(3+\cos\theta)^2+\sin^2\theta} = \sqrt{10+6\cos\theta}$



$$\frac{\overline{P'H_1}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10-6\cos\theta}},\ \overline{P'H} = \frac{8}{\sqrt{10-6\cos\theta}},\ \ \overline{YH_2} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{10-6\cos\theta}}{\sqrt{18-6\cos\theta}}$$

$$\overline{PH_2} = \sqrt{\overline{PH_1}^2+8} = \sqrt{18+6\cos\theta},\ \overline{PP'} = \sqrt{10+6\cos\theta-\frac{64}{10-6\cos\theta}} = \sqrt{\frac{36\sin^2\theta}{10-6\cos\theta}}$$

$$|\overrightarrow{XY}|^2 = \frac{8(10-6\cos\theta)}{18-6\cos\theta}\times\frac{36\sin^2\theta}{18+6\cos\theta}\times\frac{1}{10-6\cos\theta} = \frac{8\sin^2\theta}{(8+\sin^2\theta)}$$
이므로

$6\sqrt{12-|\overrightarrow{XY}|^2} = 6|\overrightarrow{TX}+\overrightarrow{TY}| = 6\times\frac{10}{3} = 20$ 정답은 20이 됩니다.(여기서 $|\overrightarrow{XY}|$는 $|\overrightarrow{YH_2}|\sin(\angle PH_2P') = |\overrightarrow{XY}|$를 이용하여 구하였습니다.)