제 2 교시

THE PREMIUM

2024년 11월 고3 모의대학수학능력시험 문제지

수학 영역

성명		수험 번호			반	–					번

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

꽃 필 차례가 바로 그대 앞에 있다

○ 답안지의 해당란에 학교(학원), 반, 번, 성명을 쓰고, 또 수험 번호, 생년월일, 선택과목, 성명과 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작될 때까지 표지를 넘기지 마십시오.

대성학력개발연구소

제 2 교시

수학 영역

THE PREMIUM

5지선다형

1. $\left(\frac{\sqrt{3}}{27}\right)^{\frac{1}{5}}$의 값은? [2점]

① $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

$\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^3}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(3^{-\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

$9x^2-8x+1$

2. 함수 $f(x)=3x^3-4x^2+x$에 대하여

$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$의 값은? [2점]

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

$f'(-1) = 9+8+1$

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=2}^{5} a_{k-1} = \sum_{k=1}^{5}(a_k-2k)$일 때,

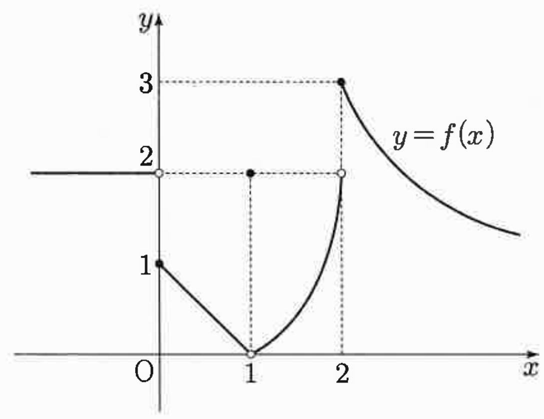
a_5의 값은? [3점]

① 25 ② 30 ③ 35 ④ 40 ⑤ 45

$\sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=1}^{5} a_k - 2\cdot\frac{5\cdot 6}{2}$

$\therefore a_5 = 30$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

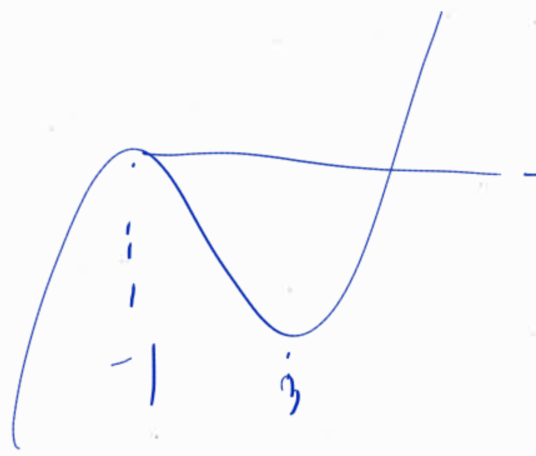
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$2+3$

5. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$의 극댓값은? [3점]

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

$3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

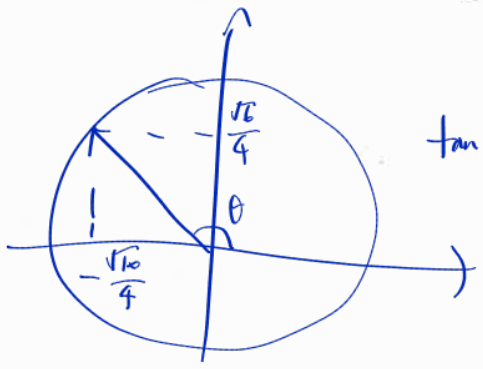


$-1-3+9+2$
$=7$

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{4}$일 때, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$의 값은? [3점]

$= -\frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

① $-\frac{\sqrt{15}}{3}$　② $-\frac{\sqrt{6}}{3}$　③ $\frac{\sqrt{6}}{3}$　④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\frac{\sqrt{15}}{3}$



$\tan\theta = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$

7. 두 곡선 $y=4x^3+x^2+2x$, $y=x^2+2x-4$와 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

교점 : $4x^3+4=0$
$4(x+1)(x^2-x+1)$
$x=-1$

$\therefore \int_{-1}^{1}(4x^3+4)\,dx$
$=8$

8. 부등식

$$2^{2x}+1 \le 2^{x+2}+2^{x-2}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2^x = X$

$X^2+1 \le 4X+\frac{1}{4}X$

$4X^2-17X+4 \le 0$

$\frac{1}{4} \le X \le 4 \qquad -2 \le x \le 2$

9. $f(1)f(4)<0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

→ f(x)는 x축과 두 점에서 만남.

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ 2 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이 $x=3$에서만 불연속이다. $f(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

의심점: $f(x)=0$ 인 지점 → $x=\alpha,\ 3$.
연속 불연속

$\lim_{x\to\alpha}\frac{\overset{\to 0}{x+1}}{\underset{\to 0}{f(x)}}=2$

∴ $\alpha=-1$ $\quad f(x)=m(x+1)(x-3)$

$\lim_{x\to -1}\frac{1}{m(x-3)}=-\frac{1}{4m}=2 \quad ∴ m=-\frac{1}{8}$

∴ $f(1)=-\frac{1}{8}\cdot 2\cdot(-2)$
$=\frac{1}{2}$

10. 예각삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여

$$\overline{AC}=7,\quad \overline{AD}:\overline{CD}=3:4$$

이고, 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는 $\frac{48}{5}\pi$이다.
삼각형 ABC의 외접원의 넓이와 삼각형 BCD의 외접원의 넓이가 같을 때, 선분 BD의 길이는? [4점]

sin 법칙.

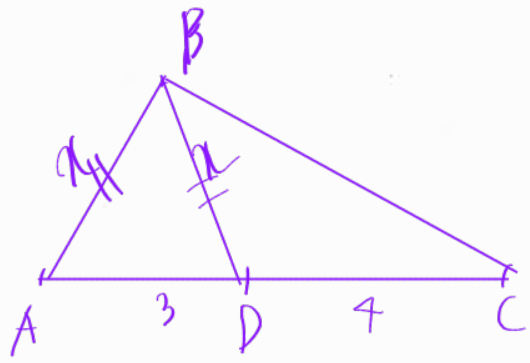
① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$

∴ $\sin\angle BAC=\sin\angle BDC$

합 $=\pi$.

∴ $\angle BAD=\angle BDA$



△ABD에서

$\frac{3}{\sin\angle ABD}=2R=2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$\sin\angle ABD=3\cdot\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{8}$

$\cos\angle ABD=\frac{7}{8}$

$3^2=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cdot\frac{7}{8}$

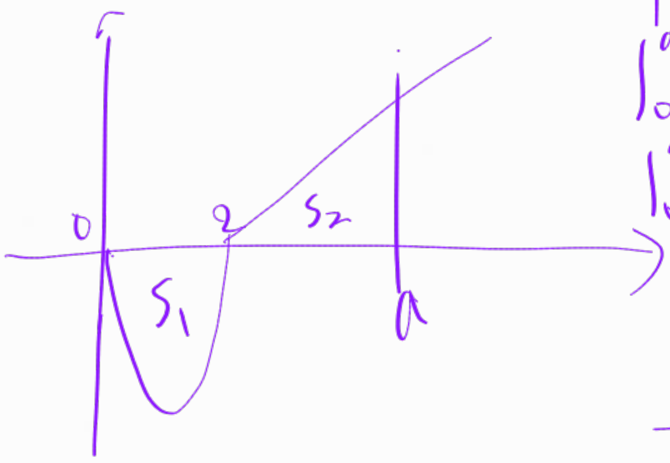
$\frac{1}{4}x^2=9 \quad x=6$

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases} 3t^2-6t & (0\leq t\leq 2) \\ t-2 & (t>2) \end{cases}$$

이다. 시각 $t=0$에서 $t=a\ (a>0)$까지 점 P가 움직인 거리는 b이고, 시각 $t=a$에서 점 P의 위치가 $\frac{b}{3}$일 때, $\frac{b}{a}$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3



$\int_0^a |v(t)|dt = b$

$\int_0^a v(t)dt = \frac{b}{3}$

$S_1+S_2=b$

$-S_1+S_2=\frac{b}{3}$

$S_1=\frac{b}{3},\ S_2=\frac{2}{3}b$

$S_1 = \frac{3}{6}\cdot 2^3 = 4$, $S_2 = 8$

$\therefore b=12$　$\therefore a=6$

12. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{k=1}^{6}(-1)^k a_k = 3\times\sum_{k=1}^{6} a_k$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{7}(-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{7}(a_k)^2$

$a_k>1$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은? [4점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

(가) $-\cancel{a_1}\cdot\frac{\cancel{r^6-1}}{-r-1} = 3\cancel{a_1}\cdot\frac{\cancel{r^6-1}}{r-1}$

$\frac{1}{r+1}=\frac{3}{r-1}$　$r-1=3r+3$

$\therefore r=-2$

(나) $-a_1\cdot\frac{-2^7-1}{-2-1} = a_1^2\cdot\frac{4^7-1}{4-1}$

$\cancel{a_1}\cdot\frac{2^7+1}{3} = a_1^{\cancel{2}}\cdot\frac{2^{14}-1}{3}$

$a_1(2^7-1)=1$

$a_1=\frac{1}{2^7-1}$

$a_k=\frac{1}{2^7-1}\cdot(-2)^k>1$

$\therefore k$ 최소 $=8$

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

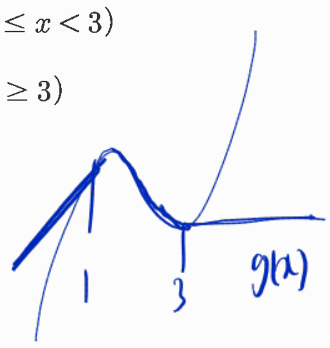
$$g(x)=\begin{cases} f'(1)(x-1)+f(1) & (x<1) \\ f(x) & (1\le x<3) \\ f'(3)(x-3)+f(3) & (x\ge 3) \end{cases}$$

일 때,

$$\lim_{x\to 0}\left\{2x\times g\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=-g'(2)$$

가 성립한다. $f(2)=4$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$\frac{1}{x}=$ 't'

1차함수

$x\to 0+$: $\lim_{t\to\infty} 2\cdot\frac{1}{t}\cdot g(t)=2f'(1)$ \\ $-f'(2)$

$x\to 0-$: $\lim_{t\to-\infty} 2\cdot\frac{1}{t}\cdot g(t)=2f'(3)$ //

$f'(1)=f'(3)\rightarrow$ 변곡점 $x=2$에서

$f'(x)=3(x-2)^2+k$

$2f'(1)+f'(2)=0$

$2(3+k)+k=0$

$k=-2$

$\therefore f(x)=(x-2)^3-2(x-2)+4$

$g(5)=2f'(3)+f(3)$

$=2\cdot 1+1-2+4$

$=5$

14. 두 양수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\pi|\sin ax|+b$$

$\frac{2\pi}{a}$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

> (가) 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 함수 $f(x)$의 주기와 같다. $\pi+b$ b
>
> (나) $0\le x\le\frac{\pi}{a}$일 때, 방정식 $f(f(x))=f(b)$의 모든 실근의 합은 5π이다.

① $\frac{\pi}{5}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{3}{10}\pi$ ④ $\frac{7}{20}\pi$ ⑤ $\frac{2}{5}\pi$

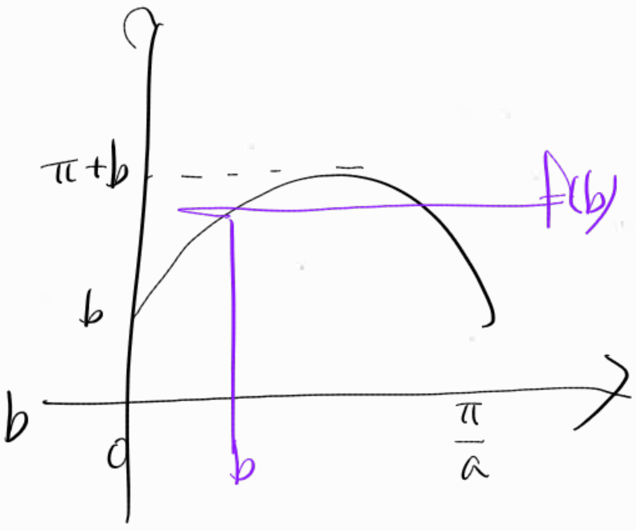
(가) $\pi+2b=\frac{\pi}{a}$

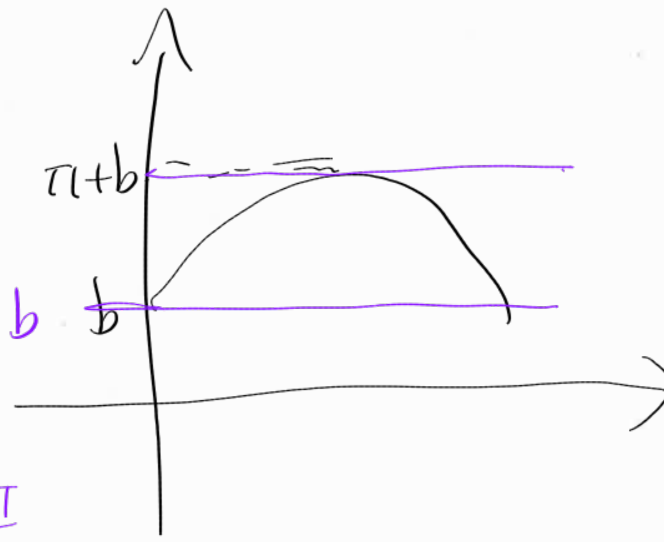
(나) $f(x)=$ 't'

$f(t)=f(b)$

(가) $\rightarrow$ $b<\frac{\pi}{2a}$

$\therefore t=b$ or $\frac{\pi}{a}-b$ ($=\pi+b$)





$\therefore x=0,\ \frac{\pi}{2a},\ \frac{\pi}{a}$

$\frac{3\pi}{2a}=5\pi$ $\therefore a=\frac{3}{10}$ $\therefore b=\frac{2}{6}\pi$

$\therefore ab=\frac{1}{20}\pi$

15. $0<k<\frac{12}{7}$인 상수 k에 대하여 함수

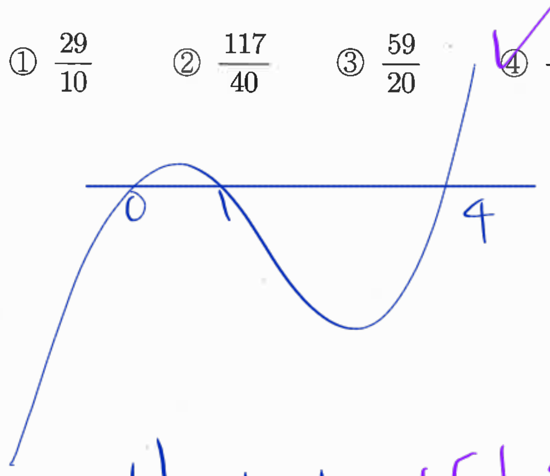
$$f(x)=kx(x-1)(x-4) = k(x^3-5x^2+4x)$$

가 있다. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_1^3 g(x)\,dx$의 값은? [4점]

(가) $f(x)\ge 0$이면 $g(x)=f(x)$이다.

(나) $\int_0^n g(x)\,dx=n$을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 n의 값은 n_1, n_2, n_3, n_4이고, $n_1+n_2+n_3+n_4=15$이다.

① $\frac{29}{10}$ ② $\frac{117}{40}$ ③ $\frac{59}{20}$ ④ $\frac{119}{40}$ ⑤ 3



(나) $\int_0^1 g(x)\,dx = k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+2x^2\right]_0^1$

$= \frac{7}{12}k < 1$

$\therefore 1 \notin \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$

$\therefore$ 2 3 4 6

$\int_0^4 g(x)dx=4$

$\int_0^6 g(x)dx=6$

$\therefore \int_4^6 g(x)\,dx = k\cdot\left\{324-360+72-\left(64-\frac{320}{3}+32\right)\right\}$

$= k\cdot\left\{36+\frac{32}{3}\right\} = \frac{140}{3}k = 2$

$k=\frac{3}{70}$

$\therefore \int_1^3 g(x)dx = \int_0^3 g(x)\,dx - \int_0^1 g(x)dx$

$= 3-\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{70} = 3-\frac{1}{40}$

단답형

16. 방정식

$$\log_6(x+3)=2+\log_{\frac{1}{6}}(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x>-3$

$x>2$

$x+3=\frac{36}{x-2}$

$x^2+x-42=0 \quad \therefore x=6$

17. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=6x^2-4x+\underset{c}{f(0)},\quad f(1)=-\frac{2}{3}$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=2x^3-2x^2+cx+c$

$f(1)=2c=-\frac{2}{3} \quad \therefore c=-\frac{1}{3}$

$f(2)=16-8+3c=8-1=7$

18. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = -9, \quad |a_3| = |a_4|$$

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

$a_3 + a_4 = 0.$

$-18 + 5d = 0.$ $\quad d = \frac{18}{5}$

$\therefore a_6 = -9 + 5d = 9$

19. 두 상수 a, b $(a < b)$에 대하여 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 4}{x - 1} = 3, \quad \lim_{x \to 1} \frac{\{f(x) - a\}\{f(x) - b\}}{x - 1} = 6$$

$\to 0.$

을 만족시킬 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. [3점]

$f(1) = 4$ $\quad (4-a)(4-b) = 0$

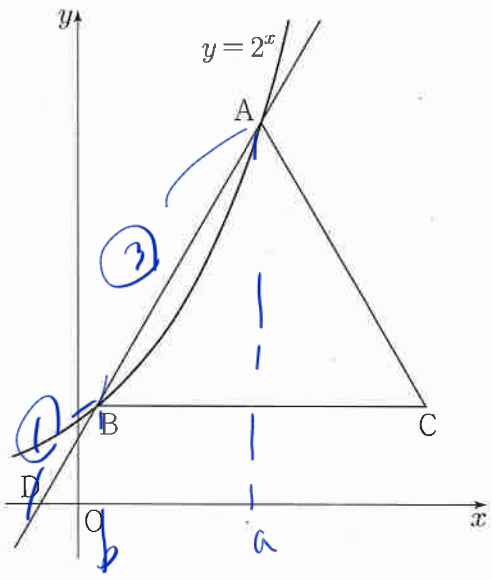
$f'(1) = 3.$ $\quad a = 4$ or $b = 4$.

i) $a = 4.$ $\quad f'(1)\cdot(4-b) = 6$, $f'(1)=3$ ✗.

ii) $b = 4$ $\quad f'(1)(4-a) = 6$, $f'(1)=3$ $\quad \therefore a = 2$

$\therefore 20$

20. 그림과 같이 곡선 $y = 2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{B}(b,\ 2^b)$이 있다. 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC가 정삼각형이다. 직선 AB가 x축과 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{\mathrm{AC}} = 3\overline{\mathrm{BD}}$이다. $6 \times 2^{a+b}$의 값을 구하시오. [4점]



$2^a = 4 \cdot 2^b.$

$\therefore a = b + 2.$

$\therefore \triangle ABC$ 한 변 $= 4.$

$2^a - 2^b = 2\sqrt{3}.$

2^{b+2}

$2^b \cdot 3 = 2\sqrt{3}.$

$2^b = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad 2^a = \frac{8}{\sqrt{3}}.$

$\therefore$ 답 $= 6 \cdot \frac{16}{3} = 32$

21. 함수

$$f(x)=2x^4+(3-2a)x^3-3ax^2-x$$

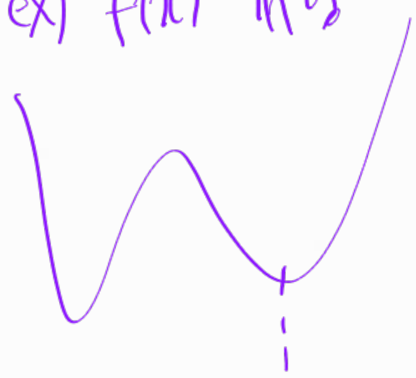
가 있다. $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x+k)>f(k)$를 만족시키는 실수 k의 최솟값이 a일 때, $f'(1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

$f'(x)=8x^3+3(3-2a)x^2-6ax-1$

	8	$9-6a$	$-6a$	-1
-1		-8	$6a-1$	1
	8	$1-6a$	-1	$\boxed{0}$

$(x+1)(8x^2+(1-6a)x-1)$

ex) f(x) 개형



a

f(x)가 극소가 되는 x의 최댓값 = a.

$f'(a)=0$.

$8a^2-6a^2+a-1=0$

$2a^2+a-1=0$

$(2a-1)(a+1)$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ or -1

$a=-1$이면 $f'(x)=(x+1)(8x^2+7x-1)$
$=(x+1)^2(8x-1)$

$\rightarrow x=-1$에서 극값X

$\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore f'(1)=2\cdot 5=10$

22. $a_1=5$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -a_n & (\sqrt{|a_n|}\text{이 자연수인 경우}) \\ a_n+k & (\sqrt{|a_n|}\text{이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 집합 A를

$$A=\{m \mid -10<a_m\le -2,\ m\text{은 10 이하의 자연수}\}$$

라 할 때, $n(A)=5$, $3\in A$가 되도록 하는 정수 k에 대하여 $k+a_{10}$의 값을 구하시오. [4점]

$a_1=5$

$a_2=5+k$ ← -2 　 0

($\sqrt{|5+k|}$가 자연수) ($\sqrt{|5+k|}$가 자연수 X)

$a_3=-5-k$. 　 $5+2k=-9$ 　 0

(k=-7) 　 ~~(k=-5)~~

$a_4=5+k$ 　 9 　 0

$-5-k$ 　 -9 　 0

9 　 0

-9

$-10<5+2k\le -2$

$k=-7,\ \cancel{-6},\ -5,\ \cancel{-4}$

$-10<\underset{a_3}{-5-k}\le -2$ 　 $\therefore$ 답 $=-7+9$
$=2$

$n(A)=4$

X.

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

THE PREMIUM

5지선다형

23. 다항식 $(x+2)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [2점]

① 5 ② 10 ③ 20 ④ 40 ⑤ 80

${}_5C_3 \cdot 2^2$

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{4}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(2X+1)+\mathrm{V}(2X+1)$의 값은? [3점]

① 124 ② 126 ③ 128 ④ 130 ⑤ 132

$2E(X)+1+4V(X)$

$=2\cdot 25+1+4\cdot\frac{75}{4}$

$=126$

25. 어느 지역 주민의 한 달 운동 시간은 평균이 m시간, 표준편차가 4시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역 주민 중에서 64명을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $a \le m \le a+b$이다. b의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 0.98 ② 1.47 ③ 1.96 ④ 2.45 ⑤ 3.92

$=\bar{x}$

$\bar{x} - \frac{1}{2}\cdot 1.96 \le m \le \bar{x} + \frac{1}{2}\cdot 1.96$

$\therefore b = 1.96$

26. 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 여섯 개를 다음 조건을 만족시키도록 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 여섯 자리의 자연수의 개수는? [3점]

(가) 모든 수를 적어도 하나씩 선택한다.
(나) 선택한 홀수들의 합이 12의 약수이다.

① 480 ② 510 ③ 540 ④ 570 ⑤ 600

(나)

$13 : \underbrace{6\cdot 5}_{1,3\text{ 자리 결정}} \cdot \underbrace{(2^4-2)}_{\text{나머지 자리 2,4 선택}} = 420$

$1113 : \underbrace{{}_6C_3}_{1\text{ 자리 결정}} \cdot \underbrace{{}_3C_1}_{3\text{ 자리 결정}} \cdot \underbrace{2}_{2,4\text{ 배열}} = 120$

$\therefore 540$

27. 1부터 9까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 세 개의 수의 합이 3의 배수가 아니거나 선택된 세 개의 수의 곱이 3의 배수가 아닐 확률은? [3점]

① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

$\underbrace{{}_9C_3}_{\text{전체}} - \underbrace{(1 + 3\cdot3\cdot3)}_{\text{여사건}}$

: $a+b+c = 3$의 배수
$abc = 3$의 배수

{3k, 3k, 3k}
OR
{3k, 3k+1, 3k+2}

$= 56$

$\frac{56}{84} = \frac{2}{3}$

28. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(10+x)=f(-x)$를 만족시킨다.

(나) $\sum_{n=1}^{8} \mathrm{P}(X \le n) = 3.5228$

$f(x)$: $x=5$ 대칭
$m=5$.

확률변수 $Y=2X-1$에 대하여 $\mathrm{P}(Y \ge 13)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668 ④ 0.1359 ⑤ 0.1587

$\mathrm{P}(X\le1)+\mathrm{P}(X\le2)+\mathrm{P}(X\le3)+\mathrm{P}(X\le4)+\mathrm{P}(X\le5)+\mathrm{P}(X\le6)+\mathrm{P}(X\le7)+\mathrm{P}(X\le8)$

0.5

$= 3.5 + \mathrm{P}(X\le1) = 3.5228$

0.0228

$\mathrm{P}(1\le X\le5) = 0.4772$

$2\sigma = 4 \quad \therefore \sigma = 2$

$\mathrm{P}(Y\ge13) = \mathrm{P}(X\ge7) = \mathrm{P}(Z\ge1)$

$= 0.5 - 0.3413$

$= 0.1587$

단답형

29. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.
>
> (나) $f(2)+f(4)=6$
>
> (다) $f(3) \times f(a) \ge 25$인 집합 X의 원소 $a\,(a \ne 3)$이 존재한다.

$f(2)$ $f(3)$ $f(4)$

3 3 X

2 4 4 $f(a)=7$인 a 존재 ($f(7)=7$) $2 \times {}_4H_2 = 20$ (4,5,6,7 중)

1 4 5 $f(a)=7$인 a 존재 ($f(7)=7$) $1 \times {}_3H_2 = 6$ (5,6,7 중)

1 5 5 $f(a) \ge 5$인 a 존재 $1 \times {}_3H_3 = 10$

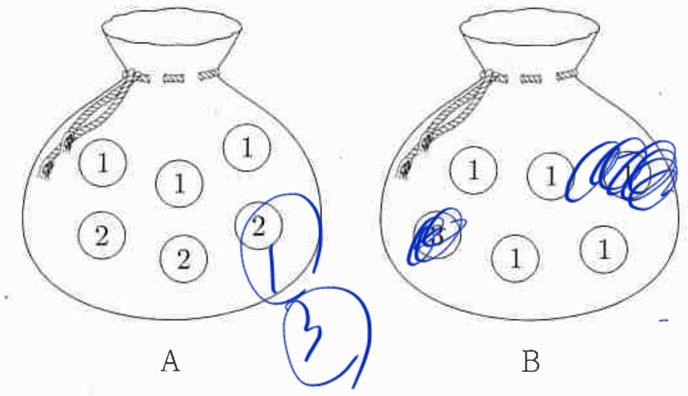
$f(1)$ 선택, $f(5) \sim f(7)$ 선택

∴ 답 = 36

30. 주머니 A에는 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 2가 하나씩 적힌 공 6개가 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 1, 1, 1, 1, 3이 하나씩 적힌 공 6개가 들어 있다. 두 주머니 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 3이 적힌 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공을 꺼낸 주머니가 아닌 주머니에 넣는다.

이 시행을 3번 반복한 후 주머니 B에 2가 적힌 공이 들어 있을 때, 주머니 B에 3이 적힌 공이 들어 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



1번째 2번째 3번째

B에서 1개 냄 — B에서 1개 냄 X

B에서 1개 냄 — 3개 냄 — A에서 2개 냄 $\frac{5}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{16}$

B에서 3개 냄 — A에서 1개 냄 — A에서 2개 냄 $\frac{1}{6} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{28}$

2개 냄 — A에서 3개 냄 $\frac{1}{6} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{84}$

1or2개 냄 $\frac{1}{6} \times \frac{3}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{84}$

3개 냄 X

∴ 답 = $\dfrac{\frac{1}{84}}{\frac{1}{16}+\frac{1}{28}+\frac{1}{84}+\frac{5}{84}} = \frac{4}{57}$

∴ 61.

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

THE PREMIUM

5지선다형

23. $\int_{1}^{6} \sqrt{x+3}\,dx$ 의 값은? [2점]

① $\frac{22}{3}$ ② $\frac{26}{3}$ ③ 10 ④ $\frac{34}{3}$ ⑤ $\frac{38}{3}$

$\left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{6} = \frac{2}{3}(27-8)$

24. 공차가 -2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}\right)^2 = a_2$일 때, a_8의 값은? [3점]

$\frac{a_n}{n} = d$

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

$4 = a_2.$

$a_8 = 4 - 2 \cdot 6 = -8$

25. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\{\ln(n+k)^{2n+2k}-\ln n^{2n+2k}\}$의 값은? [3점]

① $2\ln 2-\frac{3}{2}$ ② $\ln 2-\frac{1}{2}$ ③ $2\ln 2-\frac{1}{2}$ ④ $4\ln 2-\frac{3}{2}$ ⑤ $4\ln 2-\frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{(n+k)^{2n+2k}}{n^{2n+2k}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot(2n+2k)\cdot\ln\frac{n+k}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{n}}_{dx}\sum_{k=1}^{n}2\left(1+\underbrace{\frac{k}{n}}_{x}\right)\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$=\int_0^1 2(1+x)\ln(1+x)\,dx$

$=\int_1^2 2x\ln x\,dx$

$=\left[x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$

$=4\ln 2-2-\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=4\ln 2-\frac{3}{2}$

26. 매개변수 $t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$로 나타내어진 곡선 C가

$$x=\tan t,\quad y=a\sec t-1$$

일 때, 곡선 C가 곡선 $y=x^2$과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선의 기울기가 3일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{14}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

$\tan^2 t=a\sec t-1$

$\sec^2 t-1$

$\sec t(\sec t-a)=0$

$\sec t\neq 0$이므로 $\sec t=a\to\cos t=\frac{1}{a}$

접선의 기울기 $=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$=\frac{a\cdot\tan t\sec t}{\sec^2 t}=a\cdot\cos t\cdot\frac{\sin t}{\cos t}$

$=a\sin t=3$

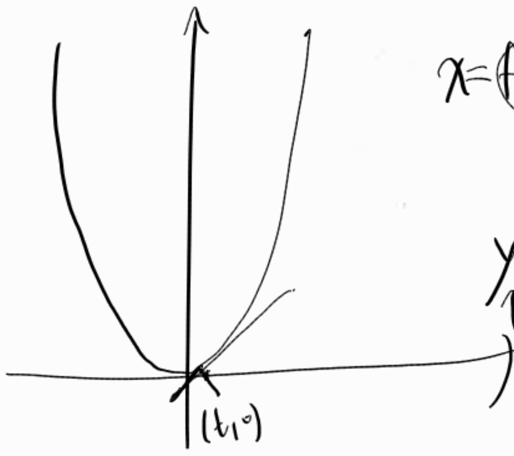
$\sin t=\frac{3}{a}$

$\frac{10}{a^2}=1$

$a=\sqrt{10}$

27. 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중 점 $(t,\ 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$의 역함수를 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)+g(t)}{t}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$



$x=f(t)$에서의 법선이 $(t,0)$을 지나야 함

α

$y=-\frac{1}{2\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2$

$-\frac{t-\alpha}{2\alpha}+\alpha^2=0$

$\frac{t-\alpha}{2\alpha}=\alpha^2$

$t-\alpha=2\alpha^3$

$t=2\alpha^3+\alpha$

$\therefore g(t)=2t^3+t$

답 $=f'(0)+g'(0)$

$=\frac{1}{g'(0)}+g'(0)$

$=1+1$

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 세 실수 $p,\ q,\ r\ (p<q<r)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
>
> $$xf'(x)-f(x)=x^2\cos x$$
>
> 를 만족시킨다.
>
> (나) $0\le x<4\pi$에서 부등식
>
> $$f(x)\le\left|f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|$$
>
> 를 만족시키는 실수 x는 $p,\ q,\ r$ 뿐이다.

$p+\int_q^r\frac{f(x)}{x}dx$의 값은? [4점]

① $1+\pi$ ② 2π ③ $2+3\pi$ ④ 4π ⑤ $3+5\pi$

(가) $\int\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}dx=\int\cos x\,dx$

$\frac{f(x)}{x}=\sin x+C$

$f(x)=x\sin x+Cx$

$\rightarrow f(0)=0$

(나) if $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$ 이면

$f(x)\le\left|f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|$ 만족하는

실수 x가 무수히 많음.

$(x\to 0+$일 때$)$

$\therefore f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$

$+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}C=0 \quad \therefore C=1$

$f(x)=0$

$x(\sin x+1)=0 \quad \therefore x=0,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$

$\therefore$ 답 $=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{7}{2}\pi}(\sin x+1)\,dx=2\pi$

단답형

29. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$과 상수 k에 대하여

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|,\ \sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n-1}|,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\right\}=\{-1,\ 2,\ k\}$$

이다. $70\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|$의 값을 구하시오. [4점]

70 70

-1

$a_1<0,\ 0<r<1$

i) ii)

2

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \frac{-a_1}{1-r}$

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n-1}| = \frac{-a_1}{1-r^2} = 2$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n} = \frac{a_2}{1-r^2} = -1$

-1

$\frac{a_2}{a_1} = -\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$

$a_1=-\frac{3}{2}$

$\frac{a_1 r}{a_1(1+r)} = \frac{1}{2}$

$r=1$ ×

$\frac{-a_1}{\frac{3}{4}} = 2$

$\therefore 70\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}| = 70\cdot\frac{-a_3}{1-r^3}$

$= 70\cdot\frac{-\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{7}{8}}$

$= 70\cdot\frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}} = 30$

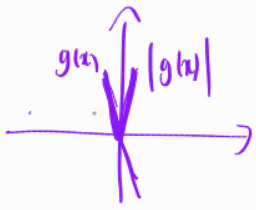
30. 최고차항의 계수가 a인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
>
> $p(x)=$ $|g(x)|=|f(x)|e^x+|e^x-a|$
>
> 이다.
>
> (나) $g(0)=0,\quad g'(0)=-5$

$g(1)$의 최댓값과 최솟값의 합이 $pe+q$일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]

(나) $\to 0=|f(0)|+|1-a|$

$\therefore f(0)=0,\ a=1.$



$x\neq0$에서 $|g(x)|>0$

$\to x\neq0$에서 $|g(x)|$ 미분가능.

$p'(0+)=5$

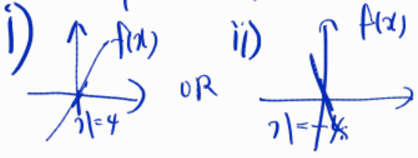
$p'(0-)=-5.$

$p'(x)=\{|f(x)|+(|f(x)|)'\}e^x+\{|e^x-1|\}'$

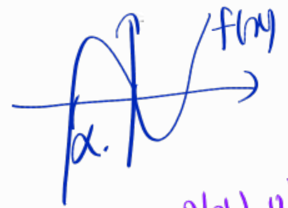
$p'(0+)=\{\quad 4\quad\}+1=5$

$p'(0-)=\{\quad -4\quad\}-1=-5.$

$\therefore$ i) ii)



ii) i)



$x=\alpha$에서 $p(x)$ 미분 불가

$\to$ 모순.

$f(x)=x(x^2+mx+4)$

중근 or 서로다른 두 허근

$D=m^2-16\le0$

$-4\le m\le4$

$|g(1)|=|f(1)|\cdot e+e-1$

$=e(m+5)+e-1=em+6e-1\le10e-1$

$2e-1\le$

근데 $x>0$에서 $g(x)<0$

$\therefore Max=-2e+1$

$min=-10e+1$

$\therefore$ 답$=148$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 A(3, 3, 0), B(−3, 1, 6)이 있다. 선분 AB의 중점의 좌표가 $(0,\ a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 두 초점이 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$ $(c>0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{36}=1$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{FP}}-\overline{\mathrm{F'P}}=4$이다. $\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{FP}}$일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

25. 직사각형 ABCD에 대하여

$$|\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CD}|=30$$

일 때, $|\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}|$의 값은? [3점]

① $18\sqrt{5}$ ② $20\sqrt{5}$ ③ $22\sqrt{5}$ ④ $24\sqrt{5}$ ⑤ $26\sqrt{5}$

26. 좌표공간에 구

$$S:(x-4)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=16$$

이 있다. $\overline{OP}=8$을 만족시키는 구 S 위의 점 P가 나타내는 원의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 12π ② 13π ③ 14π ④ 15π ⑤ 16π

27. 점 F를 초점으로 하는 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$의 준선 위의 점 A를 중심으로 하고 y축에 접하는 원을 C라 하자. 원 C 위의 점 P에 대하여 선분 PF의 길이의 최댓값과 최솟값이 각각 12, 8이다. 선분 AF와 포물선이 만나는 점을 B라 할 때, 선분 BF의 길이는? [3점]

① $\frac{12}{7}$　② 2　③ $\frac{16}{7}$　④ $\frac{18}{7}$　⑤ $\frac{20}{7}$

28. 한 원 위에 있는 서로 다른 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=3$

(나) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$

(다) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\cdot(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}$의 값은? [4점]

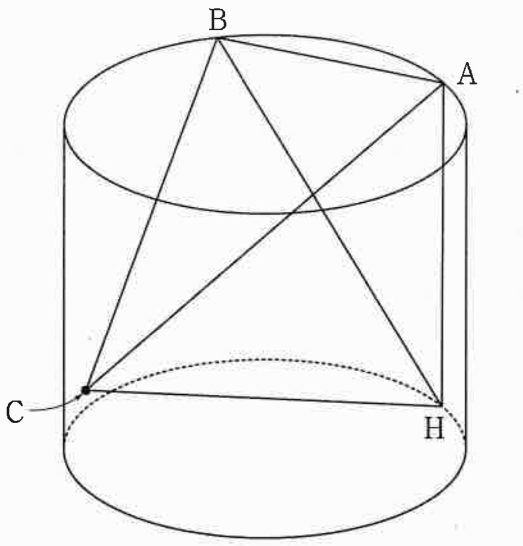
① $\frac{24}{5}$　② $\frac{26}{5}$　③ $\frac{28}{5}$　④ 6　⑤ $\frac{32}{5}$

단답형

29. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 2이고 높이가 4인 원기둥이 있다. 원기둥의 한 밑면의 둘레 위에 서로 다른 두 점 A, B와 원기둥의 옆면 위에 점 C를

$$\overline{AB}=3,\quad \overline{BC}=4,\quad \overline{AC}=5$$

가 되도록 잡는다. 점 A에서 A를 포함하지 않는 원기둥의 밑면에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 사면체 ABCH의 부피는 V이다. V^2의 값을 구하시오. [4점]



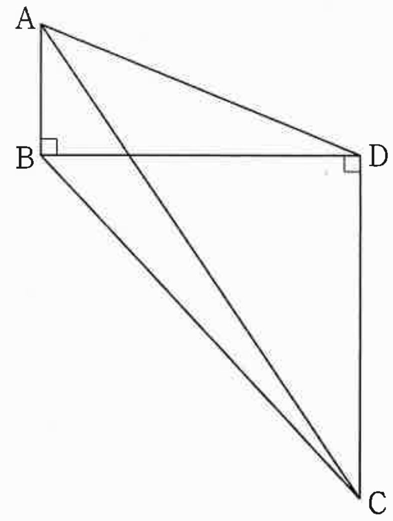
30. 한 평면 위에 있는 서로 다른 네 점 A, B, C, D가

$$\overline{BD}=6,\quad \angle ABD=\angle BDC=\frac{\pi}{2},\quad \angle BAC<\frac{\pi}{2}$$

를 만족시킨다. 선분 AC 위를 움직이는 점 P에 대하여

$$\overline{DP}-\overline{BP}=4$$

를 만족시키는 점 P가 A뿐일 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값을 구하시오. [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작될 때까지 표지를 넘기지 마십시오.