제 2 교시

ANNIHILATION

수학 영역

홀수형

성 명	

수험 번호					–				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

> 올 때는 인적 그친 넓고 깨끗한 하늘로 오라

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.

김치말이현수

ANNIHILATION

수학 영역

제 2 교시

홀수형

5지선다형

1. $\left(\frac{4}{2^{\sqrt{3}}}\right)^{2+\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $2^{2-\sqrt{3}}$ ③ 2 ④ $2^{2+\sqrt{3}}$ ⑤ 4

2. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+2x^2+x$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

3. 공차가 0이 아니고, 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5-a_2=\frac{1}{3}(a_6)^2$ 일 때, a_{16}의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2f(x)$$

$g(3)=g'(3)=12$일 때, $f'(3)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

5. 방정식 $4^{x-1}-2^{x+\log_2 3}+k=0$ 의 두 실근의 합이 5일 때, 두 실근의 곱은? (단, k는 상수) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

6. 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하고,

$$f'(x)=3\{f(1)x-3\}\{x-3f(1)\}$$

을 만족시킨다. $f(-3)$의 값은? [3점]

① 15 ② 31 ③ 47 ④ 63 ⑤ 79

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n=4\log_2 n-2n$$

이다. $a_k>0$인 모든 자연수 k의 값의 합은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

8. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $x>0$에서 $f(x)\ge 0$이고 $\int_{f(0)}^{f(3)} f(x)dx=0, f'(3)=0$일 때, $f'(4)$의 값은? [3점]

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 11

9. $x\ge 0$에서 $y=k\cos x$와 $y=\sin x$의 그래프의 교점의 x좌표를 작은 것부터 크기순으로 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ 라 할 때, 세 점 $(0,k), (\alpha_1, \tan\alpha_1), (\alpha_2, \sin\alpha_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 세 점 $(\alpha_2, \sin\alpha_2), (\alpha_2, \tan\alpha_2), (\alpha_3, \tan\alpha_3)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이의 $\frac{2}{3}$배이다. $\tan\alpha_6$의 값은? [4점]

① $-\sqrt{3}$　② -1　③ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$　④ 1　⑤ $\sqrt{3}$

10. 삼차함수 $f(x)$가 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 α_1, α_2, t이다.
> (단, α_1, α_2는 0이 아닌 서로 다른 상수)
> (나) 함수
> $$g(t)=\int_0^{\alpha_2} f(x)dx$$
> 가 $g(\alpha_1)=g(\alpha_2)$를 만족시킨다.

$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$의 값은? [4점]

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 $P(t)$가

$$P(t)=t^4+at^3+bt^2+3t \quad (\text{단, } a, b\text{는 상수})$$

일 때, 시각 $t=x$에서 점 P의 위치의 변화율과 위치의 변화율이 같은 시각의 개수를 $f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$가 불연속인 양수 x가 3개 존재할 때, 그 값들 중 최댓값과 최솟값의 차가 3이다. $P(3)$의 값은? [4점]

① 30 ② 33 ③ 36 ④ 39 ⑤ 42

12. 함수 $f(x)$에 대하여 $y=|a^x-b|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점 중 x좌표가 최소인 점의 x좌표를 $g_1(t)$, $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점 중 x좌표가 최대인 점의 x좌표를 $g_2(t)$라 하면 음이 아닌 모든 실수 t에 대하여

$$2g_1(t)+g_2(t)=k \quad (\text{단, } k\text{는 상수})$$

가 성립한다. 함수 $f(x)$는 연속함수이고, 함수 $f(x)$는 열린구간 $(g_2(b), g_2(0))$에서 $f'(x) \geq -\frac{1}{2}$이다. $\int_{g_2(b)}^{g_2(0)} f(x)dx$의 값은? (단, a는 1이 아닌 자연수, b는 자연수) [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

13. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 0이 아닌 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$의 $x=t$에서의 접선과 $x=-t$에서의 접선은 평행하고 각각을 $g(x), h(x)$라 하자. 이때, $\lim_{k\to x}\frac{f(k)}{g(k)h(k)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이도록 하는 t의 값이 4개 이상 존재하고, 모든 t의 값에 대한 $\lim_{x\to t}\frac{h(x)g(x)}{f(x)}$의 값의 합이 12이다. $f(-1)$의 값은? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

14. $[-1,\infty)$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음을 만족시킨다.

$$f(x)=\begin{cases} a\tan\frac{\pi}{3}x & (-1\le x<1) \\ -pf(x-3) & (x\ge 2) \end{cases}$$

구간 $[1,2)$에서 $\left|\lim_{t\to 0+}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|=c$

이 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 다음과 같이 정의한다.

> $a_1=0,\ n\ge 2$일 때 $\int_0^n f(x)dx$의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$에 대하여, $a_n=\int_1^2 f(x)dx$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{S_{3n}\}$은 공차가 $\frac{63}{4}$인 등차수열이고, $f\left(\frac{13}{2}\right)=18$이다.

$\frac{ap}{c}$의 값은? (단, a, p, c는 상수, $a>0, p>1$) [4점]

① $\frac{2\sqrt{3}}{15}$ ② $\frac{4\sqrt{13}}{15}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{6\sqrt{3}}{5}$

15. 0이 아닌 실수 k에 대하여 증가함수

$$f(x)=\frac{|k|+ak}{k}bx \quad (a, b\text{는 상수})$$

와 실수 k에 대하여 닫힌구간 $[0, 3]$에서 정의된 함수 $g(x)$는 양의 상수 c에 대하여 닫힌 구간 $[n-1, n]$에서

$$g(x)=k^n cx(x-1)(x-2)(x-3)+f(x) \quad (n=1, 2, 3)$$

이다. 함수 $g(x)$가 극값을 갖는 x의 개수를 $h(k)$라 할 때. 함수 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(k)$가 불연속인 0이 아닌 k의 값의 개수는 3이다.
(나) 함수 $h(k)$의 치역의 원소의 개수는 3이다.

$\frac{ab}{c}$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ ③ 10 ④ $10\sqrt{3}$ ⑤ 30

단답형

16. $0 \le x \le \pi$인 x와 상수 a에 대하여 방정식

$$\tan x = a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

이 서로 다른 두 실근을 갖고, 그 두 실근의 차가 $\frac{\pi}{2}$이다. $-a\pi$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)=(x-2)^2(x-3)^2+2(x-2)(x-3)+4$에 대하여 $f'(3)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{10}(3a_n+b_n)=55,\ \sum_{n=1}^{10}(a_n+b_n)=50$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)$의 값을 구하시오. [3점]

19. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{F(x)}$는 존재하지 않고,

$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{\{f(x)\}^2}=k$이며,

$F(-3k)=0$일 때,

$F(-k)-f(-k)$로 가능한 두 값의 차가 p이다. $18p$의 값을 구하시오. (단, k는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

20. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음과 같이 정의된다.

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+ka_1 & (a_n\text{이 } a_1\text{의 약수}) \\ a_n-\dfrac{2}{k}a_1 & (a_n\text{이 } a_1\text{의 } a_1\text{이 아닌 배수}) \\ a_n-\dfrac{1}{k}a & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

$a_m=a_1$이고, 1이 아닌 m의 최솟값이 22일 때, k의 값을 구하시오. (단, k는 1이 아닌 자연수이다.) [4점]

21. 이차함수 $f(x)$와 양의 실수 t에 대하여 좌표평면에서 곡선 $y=f(x)$와 원 $C: x^2+y^2=t$가 만나는 점의 개수가 모든 양수 t에 대하여 변하지 않도록 하는 함수 $f(x)$에 대하여 $\{f'(0)\}^2$의 값의 최댓값을 구하시오. [4점]

22. 실수 k와 좌표평면 위의 원 $C: x^2+y^2=k,$ 양수 t에 대하여 직선 $y=tx+t$와 원 C가 만나는 점의 개수가 2일 때, 각각을 P, Q, 직선 $y=\frac{1}{t}x+t^2$와 원 C가 만나는 점의 개수가 2일 때, 각각을 R, S라 하자. 이때, 함수

$$f(t)=\sin^2\left(\frac{\angle POQ}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\angle ROS}{2}\right)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $f(t)$는 $t=p$일 때 극솟값을 가지며, $t \geq 2p$에서 정의되지 않는다.

이때 가능한 실수 k의 범위가 $\alpha < k \leq \beta$일 때, $18(\alpha^2+\beta^2)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

* 확인 사항

◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

◦ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

ANNIHILATION

수학 영역(미적분)

제 2 교시

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{5^{2x}-1}{\ln(1+ex)}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{e}\ln 5$ ③ $\frac{2}{e}$ ④ $\frac{2}{e}\ln 5$ ⑤ $\frac{4}{e}$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=t^2+3t,\quad y=2t+\ln t-\frac{1}{t}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

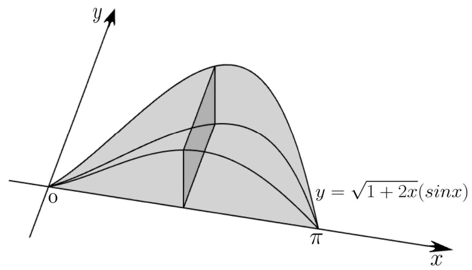
① $\frac{7}{10}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{9}{10}$ ④ 1 ⑤ $\frac{11}{10}$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt{n}\,a_n - a_n}{n} = 2$일 때,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9n(a_n)^2+7}{n^2-a_n}$ 의 값은? [3점]

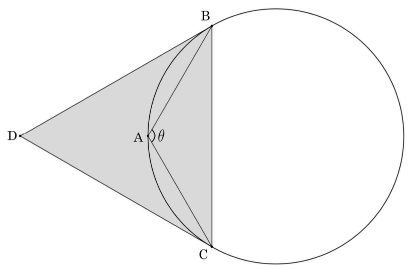
① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

26. 곡선 $y=\sqrt{1+2x}\,\sin x\ (0 \le x \le \pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하고, x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 닮음인 직사각형인 입체도형의 부피가 $\dfrac{\pi}{3}(\pi+1)$일 때, 단면 직사각형의 짧은 변의 길이가 나머지 변의 길이의 k배이다. k의 값은? [3점]



① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{\pi}{6}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{\pi}{4}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

27. 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 둔각이등변삼각형 ABC 가 있다. $\angle BAC=\theta\left(\theta>\frac{\pi}{2}\right)$일 때, 점 B, C에서의 원의 접선의 교점을 D 라 할 때, 삼각형 BCD 의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} f(\theta)\,d\theta$의 값은? [3점]



① $\ln3-\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}\ln3-\frac{1}{4}$ ③ $\ln3-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}\ln3-\frac{1}{2}$ ⑤ $\ln3-1$

28. $[-1,\infty)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & (-1\le x<1)\\ -f(x-2) & (x\ge 1)\end{cases}$$

와 양의 실수 t에 대하여 다음을 만족시키는 함수 $g(t)$가 극값을 갖는 모든 t의 값을 작은 수부터 크기순으로 $t_1, t_2, \cdots$라 하자.

$$tg(t)=f(t)$$

이때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 다음과 같이 정의한다.

$$a_n=n\left|f(t_n)\right|$$

급수 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(a_k)^2}$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

단답형

29. $f'(0)=f(1)$인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다

> (가) $\dfrac{f''(2x)}{f'(2x)}=\dfrac{f''(x)-e^{-x}\cdot x+e^{-x}}{2f'(x)+2e^{-x}\cdot x}-\dfrac{1}{2}$
>
> (나) $f'(2)=\dfrac{2}{e^2}+\dfrac{6}{e^3}$, $f(0)=1$
>
> (다) $\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)\,dx=2$

$\displaystyle\int_0^8 e^{2x}f'(2x)\,dx$의 값을 구하시오.

(단, $x\ge 0$에서 $f'(x)>0$이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여

함수 $f(x)$의 $x=p$와 $x=t$에서의 접선이 서로 수직일 때, p의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 정의역을 X라 할 때, $q\in X$인 어떤 실수 q와 0이 아닌 어떤 실수 k에 대하여 집합

$$\{r\,|\,(r-q)^2+\{g(r)-g(q)\}^2-k^2\le 0,\ r\in X\}$$

의 원소의 개수가 유한하다. 이때, 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $g\circ f'(s)$가 존재하고, $g\circ f'(x)$가 $x=s$에서 불연속인 실수 s의 값을 작은 것부터 크기순으로 나열한 것이 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$일 때,
>
> $f'(\alpha_n)=f'(\alpha_{n+2})\quad(n=1,2)$
>
> 이다.

$f(q)=0$일 때, $64f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

◦ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 $A(-4, a, -6)$, $B(b, 4, c)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 원점일 때, $a+b+c$의 값은? [2점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

24. 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$과 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$가 만나는 점 중 제 1사분면 위의 점에서의 타원의 접선의 기울기는? [3점]

① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{9}$

25. 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$에 대하여

$$|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=6, |2\vec{a}-\vec{b}| : |\vec{a}-\vec{b}| = 2 : \sqrt{3}$$

일 때, $|3\vec{a}-\vec{b}|$의 값은? [3점]

① 6　② $3\sqrt{5}$　③ $3\sqrt{6}$　④ $3\sqrt{7}$　⑤ $6\sqrt{2}$

26. 좌표공간 위에 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 서로 다른 두 점 A, B의 평면 α위로의 정사영을 A', B'라 할 때,

$$\overline{AB}=12, \overline{A'B'}=6$$

이다. 이때, 평면 α 위의 점 P를

$$\overline{A'P}=\overline{B'P}=6, \overline{BP}^2=\overline{AP}^2+144$$

이 되도록 잡는다. 삼각형 $A'B'P$의 평면 ABP 위로의 정사영의 넓이는? [3점]

① $\frac{27}{26}\sqrt{39}$　② $\frac{12}{13}\sqrt{39}$　③ $\frac{21}{26}\sqrt{39}$　④ $\frac{9}{13}\sqrt{39}$　⑤ $\frac{15}{26}\sqrt{39}$

27. 초점이 F인 포물선 $y^2=12x$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 A', 준선 위의 A'이 아닌 점 B에 대하여 $\overline{A'B}$를 $2:1$로 내분하는 점을 C라 하자. 점 C를 지나고, x축과 평행한 직선이 포물선과 만나는 점을 D라 하면, 점 A, B, D, F는 한 직선 위에 있다. 삼각형 ABC의 넓이는? [3점]

① $18\sqrt{3}$ ② $21\sqrt{3}$ ③ $24\sqrt{3}$
④ $27\sqrt{3}$ ⑤ $30\sqrt{3}$

28. 좌표공간의 구 $(x-4)^2+(y-6)^2+(z-3)^2=45$가 xy평면, xz평면과 만나서 생기는 원을 각각 C_1, C_2라 하자. 구의 중심을 O, C_1의 중심을 O', C_1과 y축의 두 교점 중 y좌표가 큰 점을 A, C_2가 x축과 만나는 점을 B라 하자. C_2 위의 점 C를 선분 AC의 길이가 최대가 되도록 잡는다. $D(0,4,0)$에 대하여 C_2의 평면 AOO' 위로의 정사영의 넓이와 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이의 곱이 $k^2\pi^2$일 때, 구를 x 또는 y 또는 z축에 수직인 평면으로 자른 단면이 반지름의 길이가 k인 원이도록 하는 모든 경우에 대하여 각 원의 중심을 이어서 정팔면체를 만들었다. 이 정팔면체의 부피는? [4점]

① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

단답형

29. 양수 c에 대하여 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$을 초점으로 하고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위의 서로 다른 두 점 A, B는 모두 제 1사분면 위에 있고, 삼각형 AFF', BFF'가 모두 직각삼각형이다. 이때,

($\triangle AFF'$의 외접원의 넓이) : ($\triangle BFF'$의 외접원의 넓이) $= 3:4$

이다. 삼각형 BFF' 의 넓이를 구하시오. [4점]

30. 좌표평면 위의 사각형 $ABCD$가 다음을 만족시킨다.

$$\overline{AB} = 6, \overline{BC} = \overline{CD} = 7, \angle ABC = \angle BCD = 90^{\circ}$$

이때, 네 점 P, Q, R, S는 다음 조건을 만족시킨다.

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{CR}| = |\overrightarrow{DS}| = 2$$

$|\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{RD} + \overrightarrow{SA}|$의 값이 최대가 되는 P, Q, R, S로 가능한 경우 중 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AS}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $-Mm$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.