수학의 슈퍼파워 - 정병호/정병훈T
2018학년도 6월 평가원모의고사 수학 가형 30번 해설

30. 실수 a와 함수 $f(x)=\ln\left(x^4+1\right)-c$ ($c>0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)이다. $a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=k\alpha_m\int_0^1 \lvert f(x)\rvert dx$

$mk\times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

조건 (가)에서 $a=\alpha_1$일 때 $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로, $g'(1)=0$이다.
즉, $f(1)=0$이 되어, $\ln 2-c=0$이다. 따라서 $c=\ln 2$이다.

부등식 $f(x)>0$으로부터 $\ln\left(x^2+1\right)>\ln 2$이므로, $x^2>1$이다.
즉, $x<-1$ 또는 $x>1$일 때 $f(x)>0$이므로, $g'(x)>0$이다.
또, $-1<x<1$일 때 $f(x)<0$이므로, $g'(x)<0$이다.

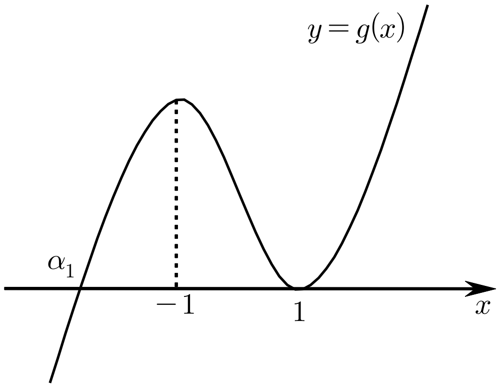
따라서 $g(x)$는 두 구간 $(-\infty,-1]$, $[1,\infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1,1]$에서 감소한다.
함수 $g(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$-\infty$		-1		1		∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	∞

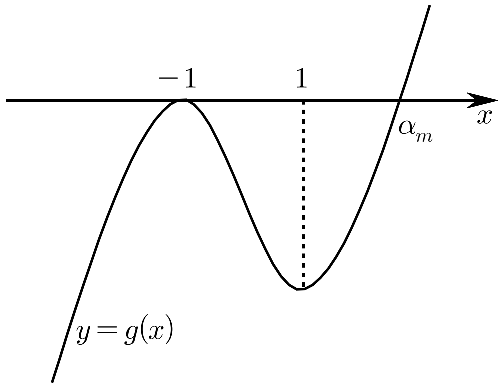
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되기 위해서는 $g(-1)=0$ 또는 $g(1)=0$을 만족해야 한다.
그런데, $g(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$에서 $g(a)=0$이므로, $g(-1)=0$이 되는 경우의 $g(a)=0$이 되는 값과 $g(1)=0$이 되는 경우의 $g(a)=0$이 되는 값을 모두 찾으면 된다.

[그림1]과 [그림2]에서 $\alpha_1<-1$, $\alpha_2=-1$, $\alpha_3=1$, $\alpha_4>1$이고, $m=4$임을 알 수 있다.

[그림1] $g(1)=0$인 경우 α_1의 위치



[그림2] $g(-1)=0$인 경우 α_4의 위치



$f(x)=\ln\left(x^4+1\right)-c$에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족한다.

$$g(-x)=\int_{\alpha_1}^{-x} f(t)dt$$

$$=\int_{-\alpha_1}^{x} f(-s)(-ds) \quad (\because\ t=-s\text{로 치환하면, } dt=-ds\text{이다.})$$

$$=-\int_{-\alpha_1}^{x} f(s)ds$$

$$=\int_{\alpha_1}^{-\alpha_1} f(s)ds-\int_{\alpha_1}^{x} f(s)ds$$

$$=2\int_{0}^{-\alpha_1} f(s)ds-g(x)$$

이 때, $\int_{0}^{-\alpha_1} f(s)ds=u$라고 하면, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(0, u)$에 대하여 대칭이다.

이것으로부터 $\alpha_m=-\alpha_1$임을 알 수 있다.

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=\int_{\alpha_1}^{-\alpha_1} g(x)dx$$

$$=\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} g(-t)(-dt) \quad (\because\ x=-t\text{로 치환하면, } dx=-dt\text{이다.})$$

$$=\int_{\alpha_1}^{-\alpha_1} \{2u-g(t)\}dt$$

$$=-4u\alpha_1-\int_{\alpha_1}^{-\alpha_1} g(t)dt$$

$$=-4u\alpha_1-\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(t)dt$$

$$\therefore\ \int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=-2u\alpha_1=-2\alpha_1\int_{0}^{-\alpha_1} f(x)dx$$

$$=2\alpha_m\{g(-\alpha_1)-g(0)\} \quad \left(\because\ -\alpha_1=\alpha_m,\ g(x)=\int_{\alpha_1}^{x} f(t)dt\right)$$

$$=2\alpha_m\{g(-1)-g(0)\} \quad \left(\because\ g(-\alpha_1)=g(-1)\right)$$

$=2\alpha_m\int_0^{-1} f(t)dt$

$=2\alpha_m\int_0^{1} f(-s)(-ds)$ ($\because$ $t=-s$로 치환하면, $dt=-ds$이다.)

$=2\alpha_m\int_0^{1} \{-f(s)\}ds$ ($\because$ 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.)

$=2\alpha_m\int_0^{1} |f(s)|ds$ ($\because$ $0\le x\le 1$일 때 $f(x)\le 0$이다.)

$\therefore$ $k=2$

$\therefore$ $c=\ln 2$, $m=4$, $k=2$로부터 $mk\times e^c=16$이다.

정답 : 16