

수학 영역(가형) by 고지우

5지선다형

1. $\sin \frac{\pi}{6} + \tan \frac{9\pi}{4}$ 의 값은? [2점]

- ① -2 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

2. 함수 $f(x) = \ln(2x+1) + 3x$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 지수부등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\beta - \alpha$ 의 값은? [2점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

4. 다음 식의 값은? [3점]

$$\frac{\sin(\pi - \theta)}{\sin(\theta - 2\pi)} - \frac{\tan(\theta - \frac{\pi}{2})}{\cot(\pi + \theta)} + \frac{\sin(\theta - \frac{3}{2}\pi)}{\cos(\theta - \pi)}$$

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 함수 $f(x)$ 가 $x > -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$\ln(1+x) \leq f(x) \leq \frac{1}{2}(e^{2x}-1)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② e ③ 3 ④ 4 ⑤ $2e$

6. $\int_0^2 \frac{2}{x^2+6x+8} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\ln \frac{1}{2}$ ② $\ln \frac{2}{3}$ ③ $\ln \frac{4}{3}$
 ④ $\ln \frac{3}{2}$ ⑤ $\ln \frac{5}{2}$

7. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sin 2x - a}{3x} & (x \neq 0) \\ b & (x = 0) \end{cases}$$

가 $x=0$ 에서 연속일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

8. 함수 $f(x)$ 가

$$f(\cos x) = \sin 2x + \tan x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

를 만족시킬 때, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은? [3점]

- ① $-2\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ 0
 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

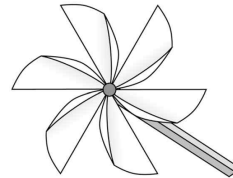
9. 함수 $f(x) = (x-1)e^x$ ($x > 0$)의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(e^2, 2)$ 에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ① $\frac{1}{2e^2}$ ② $\frac{1}{2e}$ ③ 1 ④ $2e$ ⑤ $2e^2$

10. 정적분 $\int_0^\pi (1 - \cos^3 x) \cos x \sin x \, dx$ 의 값은? [3점]

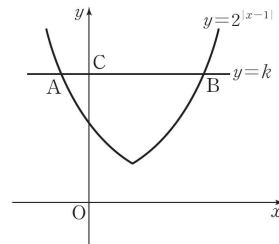
- ① 0 ② $-\frac{1}{5}$ ③ $-\frac{2}{5}$ ④ $-\frac{3}{5}$ ⑤ $-\frac{4}{5}$

11. 빨간색과 파란색을 포함한 서로 다른 6가지의 색을 모두 사용하여, 날개가 6개인 바람개비의 각 날개에 색칠하려고 한다. 빨간색과 파란색을 서로 맞은 편의 날개에 칠하는 경우의 수는? (단, 각 날개에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



- ① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

12. 그림과 같이 곡선 $y = 2^{x-1}$ 과 직선 $y = k$ ($k > 2$)의 두 교점을 각각 A, B라 하고, 직선 AB와 y 축과의 교점을 C라 하자. $\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 5$ 일 때, 상수 k 의 값은? [3점]



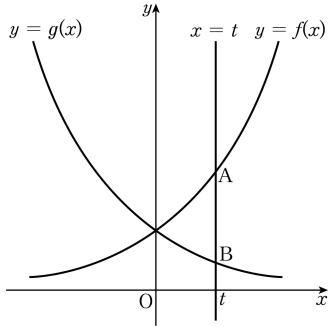
- ① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

[13 ~ 14] 좌표평면에 두 함수 $f(x)=2^x$ 의 그래프와

$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프가 있다. 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가

직선 $x=t(t>0)$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.

13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13 $t=1$ 일 때, 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

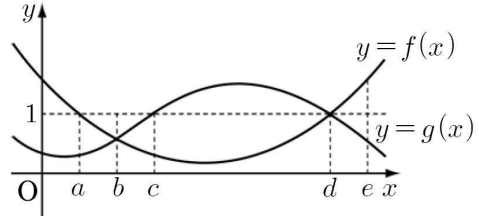
- ① $\frac{5}{4\ln 2}$ ② $\frac{1}{\ln 2}$ ③ $\frac{3}{4\ln 2}$
- ④ $\frac{1}{2\ln 2}$ ⑤ $\frac{1}{4\ln 2}$

14 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}$ 의 값은? [4점]

- ① $2\ln 2$ ② $\frac{7}{4}\ln 2$ ③ $\frac{3}{2}\ln 2$ ④ $\frac{5}{4}\ln 2$ ⑤ $\ln 2$

15 그림은 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프이다.

$0 < x < e$ 에서 로그부등식 $\log_{f(x)} g(x) > 1$ 를 만족하는 x 값의 범위는? [4점]



- ① $0 < x < a$ ② $a < x < b$
- ③ $b < x < c$ ④ $c < x < d$
- ⑤ $d < x < e$

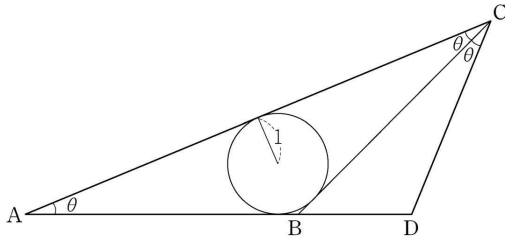
16 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} + \cos 2\pi x}{x^{2n} + 1}$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_{-x}^2 f(t) dt + \int_2^x t f(t) dt$$

라 할 때, $g(-2) + g(2)$ 의 값은? [4점]

- ① -2 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

17. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $\angle CAB = \angle BCA = \theta$ 인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle DCB = \theta$ 가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \{\theta \times S(\theta)\}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{10}{9}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{14}{9}$

18. 다음은 n 이 2 이상의 자연수일 때 $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2$ 의 값을 구하는 과정이다.

[증명]

두 다항식의 곱

$(a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1})(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)$ 에서 x^{n-1} 의 계수는 $a_0b_{n-1} + a_1b_{n-2} + \dots + a_{n-1}b_0 \dots$ (*)이다.

등식 $(1+x)^{2n-1} = (1+x)^{n-1}(1+x)^n$ 의 좌변에서 x^{n-1} 의 계수는 (가)이고, (*)을 이용하여 우변에서 x^{n-1} 의 계수를 구하면 $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \times$ (나)이다.

따라서 (가) = $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \times$ (나)이다.

한편 $1 \leq k \leq n$ 일 때, $k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 &= \sum_{k=1}^n (n \times \binom{n-1}{k-1} \times \text{(나)}) \\ &= n \times \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \times \text{(나)} \\ &= \text{(다)} \text{이다.} \end{aligned}$$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|-----------------------|----------------------|--|
| ① | $2n \binom{n}{n}$ | $n \binom{n}{n-k+1}$ | $\frac{n}{2} \times 2n \binom{n}{n+1}$ |
| ② | $2n-1 \binom{n}{n-1}$ | $n \binom{n}{n-k+1}$ | $\frac{n}{2} \times 2n \binom{n}{n}$ |
| ③ | $2n-1 \binom{n}{n-1}$ | $n \binom{n}{n-k}$ | $\frac{n}{2} \times 2n \binom{n}{n}$ |
| ④ | $2n \binom{n}{n}$ | $n \binom{n}{n-k+1}$ | $n \times 2n \binom{n}{n+1}$ |
| ⑤ | $2n-1 \binom{n}{n-1}$ | $n \binom{n}{n-k}$ | $n \times 2n \binom{n}{n}$ |

19. 함수 $f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{(x^2 - 2x + 2)^2}$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, \frac{1}{2})$ 에서의 접선과 원점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-\frac{1}{8}$ 이다.

ㄷ. 방정식 $f(x) - f(10) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2 개이다.

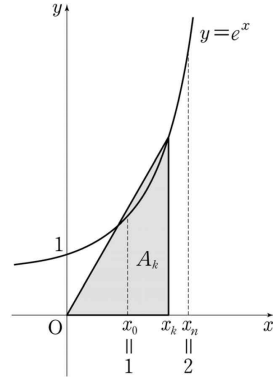
- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 $Y = \{5, 6, 7, 8\}$ 로의 함수 $f: X \rightarrow Y$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는? [4점]

(가) $f(1) \leq f(2) \leq f(3)$
 (나) $f(4) < f(3)$

- ① 37 ② 39 ③ 41
 ④ 43 ⑤ 45

21. 함수 $f(x) = e^x$ 이 있다. 2 이상인 자연수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[1, 2]$ 를 n 등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $1 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 2$ 라 하자. 세 점 $(0, 0), (x_k, 0), (x_k, f(x_k))$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_k$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{2}e^2 - e$ ② $\frac{1}{2}(e^2 - e)$ ③ $\frac{1}{2}e^2$
 ④ $e^2 - e$ ⑤ $e^2 - \frac{1}{2}e$

단답형

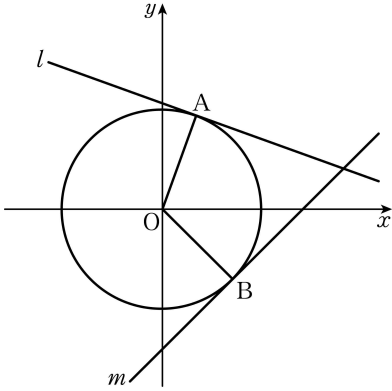
22. 함수 $y = \log_3\left(\frac{x}{9} - 1\right)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동시킨 것이라 할 때, $10(m+n)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 삼각방정식 $\sqrt{6} \sin x - \sqrt{2} \cos x - 2 = 0$ 의 모든 실근의 합을 $\frac{q}{p}\pi$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $0 \leq x \leq 2\pi$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

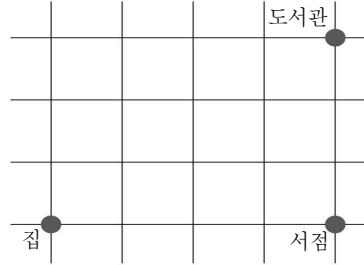
24. 원소의 개수가 8인 집합을 공집합이 아닌 2개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 방법의 수를 구하시오. [3점]

25. 좌표평면에서 세 점 $(15, 4)$, $(15, 1)$, $(64, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 로그함수 $y = \log_k x$ 의 그래프가 만나도록 하는 자연수 k 의 개수를 구하시오. [3점]

26. 그림과 같이 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 인 직선 l 이 원 $x^2+y^2=1$ 과 점 A에서 접하고, 기울기가 1인 직선 m 이 원 $x^2+y^2=1$ 과 점 B에서 접한다. $100\cos^2(\angle AOB)$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

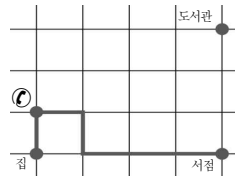


27. 그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 같은 도로망이 있다.

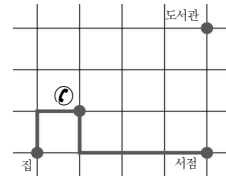


철수가 집에서 도로를 따라 최단거리로 약속장소인 도서관으로 가다가 어떤 교차로에서 약속장소가 서점으로 바뀌었다는 연락을 받고 곧바로 도로를 따라 최단거리로 서점으로 갔다. 집에서 서점까지 지나 온 길이 같은 경우 하나의 경로로 간주한다.

예를 들어, [그림1]과 [그림2]는 연락받은 위치는 다르나, 같은 경로이다.



[그림1]



[그림2]

철수가 집에서 서점까지 갈 수 있는 모든 경로의 수를 구하시오. (단, 철수가 도서관에 도착한 후에 서점으로 가는 경우도 포함한다.) [4점]

28. 함수 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 에 대하여

$$F(x) = \int_0^x t f(x-t) dt \quad (x \geq 0) \text{ 일 때, } F'(a) = \ln 10 \text{ 을}$$

만족시키는 상수 a 의 값을 구하시오. [4점]

29. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \times b \times c$ 는 홀수이다.

(나) $a \leq b \leq c \leq 20$

30. $0 < a < \frac{1}{2}$ 일 때, 함수 $f(x) = x^2 + a \ln(x+1)$ 의 극댓값과

극솟값의 합을 $g(a)$ 라 하자. 곡선 $y = g(x)$ 위의 점

$\left(\frac{1}{4}, g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = px + q$ 일 때, 두 상수

p, q 에 대하여 $e^{-p} \times q$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.